Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Introdução do conceito de matriz no ensino secundário

Cristina Maria Ramos de Pereira Ribeiro

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

Dezembro 2012

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Introdução do conceito de matriz no ensino secundário

Cristina Maria Ramos de Pereira Ribeiro

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

Orientada por Prof Dr. Pedro Jorge Santos Freitas

Dezembro 2012

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores pela maneira como nos motivaram e nos conduziram ao longo das diferentes cadeiras deste mestrado.

Em particular, agradeço ao meu orientador, professor Pedro Freitas pela paciência e compreensão pelas dificuldades causadas pela minha vida pessoal complicada e falta de tempo, e que em alguns momentos dificultaram a realização desta dissertação.

Aos colegas que com a sua boa disposição e camaradagem fizeram com que se tornasse ainda mais fácil concluir este mestrado.

Introdução

O objetivo deste trabalho é salientar a possibilidade de aplicar os conceitos, operações e propriedades das matrizes ao nível do ensino secundário.

Não é pretendido tornar pesada e profunda a parte dos conceitos e as demonstrações das propriedades, o que se tornaria difícil de fazer com os conhecimentos dos alunos do ensino secundário, mas sim mostrar as suas aplicações em problemas concretos retirados dos manuais adotados e dos exames realizados.

Assim sendo esta dissertação apresenta:

- Algumas generalidades sobre matrizes: conceitos, propriedades e operações;
- Algumas demonstrações consideradas acessíveis ao nível de conhecimentos já adquiridos pelos alunos quando entram no ensino secundário;
- Conteúdos onde pode ser aplicado o que foi dado sobre matrizes;
- Exercícios resolvidos (para além dos exemplos que ilustram tudo o que é explanado nos pontos anteriores) que ilustram o objetivo deste trabalho.

Tudo o que faz parte deste trabalho tem como base a ideia de que os processos e raciocínios utilizados no secundário, são em tudo similares aos utilizados nas matrizes (veja-se por exemplo o método de adição ordenada para resolução de sistemas, que é o equivalente à condensação de matrizes, ou o produto interno que é o equivalente ao produto de matrizes) pelo que não seria muito complicado para os alunos adaptarem-se à utilização destas estruturas.

Matrizes

Numa primeira abordagem, ao nível do ensino secundário, pode começar por referir-se que uma matriz é uma estrutura algébrica em que um conjunto de números é disposto por linhas e colunas e representados por letras minúsculas com índices que indicam o número da linha e da coluna a que pertencem, nomeadamente a_{ij} o número correspondente à uma entrada na linha i e coluna j. Os valores correspondentes a a_{11} , a_{22} e a_{33}, ou seja em que i = j, são os valores das diagonais da matriz.

Para o público alvo considerado neste trabalho é fácil associar a noção de matriz à de ponto no plano ou no espaço, ou de vetor, também no plano ou espaço, fazendo coincidir com cada linha ou coluna um ponto ou um vetor. Assim sendo todo o trabalho é feito ao nível do plano ($\mathbb{R}^2$) ou do espaço ($\mathbb{R}^3$), pelo que só interessa tratar matrizes com, no máximo, três linhas e três colunas.

1. Generalidade sobre matrizes

As matrizes podem ser classificadas de acordo com o seu tipo, representada por n×m, em que n indica o número de linhas e m o número de colunas, e neste caso particular, só serão de considerar as seguintes matrizes:

1×2 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ **1×3** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$

2×1 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ **2×2** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ **2×3** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$

3×1 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ **3×2** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ **3×3** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix}$

Algumas destas matrizes tem denominações especiais:

As matrizes com apenas uma linha, caso de 1×2 ou 1×3, as **Matrizes Linha.**

As matrizes com apenas uma coluna, caso de 2×1 ou 3×1, as **Matrizes Coluna**

As matrizes com igual número de colunas e linhas, caso de 2×2 ou 3×3, chamam-se **Matrizes quadradas**, sendo estas matrizes importantes pois têm algumas propriedades que as tornam muito úteis.

Existem algumas matrizes com características especiais, em função dos valores das suas entradas. São as seguintes:

- **Matriz Nula,** ou seja, com todas as entradas iguais a **zero.**
- **Matriz diagonal**, ou seja, com todas as entradas nulas à exceção das entradas da diagonal.
- **Matriz Triangular Superior,** uma matriz em que todas as entradas abaixo da diagonal principal são zero.
- **Matriz Triangular Inferior,** uma matriz em que todas as entradas acima da diagonal principal são zero.
- **Matriz Identidade,** uma matriz diagonal em que as entradas da diagonal são todas iguais a um e as restantes iguais a zero.

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Simétrica de uma Matriz A,** uma matriz em que todas as entradas são valores simétricos das respetivas entradas da matriz A. Esta matriz representa-se por -A.

Nas matrizes é possível definir algumas operações elementares de linha, que resultam das operações elementares entre números. Tem-se assim:

- Trocar uma linha pela adição dessa mesma linha com um múltiplo de uma outra linha da matriz.
- Trocar 2 linhas entre si.
- Multiplicar todos os elementos de uma linha por um número diferente de zero.

2. Operações com matrizes

Entre matrizes existem algumas operações básicas:

- **Transposição de uma Matriz**

Uma operação de troca de colunas por linhas e vice-versa, ou seja, a entrada a_{ij} da matriz A será a entrada a_{ji} da outra.
Esta outra matriz é chamada transposta é representada por $\boldsymbol{A^T}$ tendo-se assim que:

sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ será $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

- **Adição de Matrizes $(\boldsymbol{A+B})$.**

Duas matrizes só se podem adicionar se tiverem o mesmo tipo, pois a sua adição resulta da adição de cada uma das entradas da matriz A com a entrada da matriz B que lhe corresponde, ou seja, na mesma posição.
Assim tem-se:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

a sua soma será $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

Esta operação de adição possui algumas propriedades que são o equivalente entre matrizes das propriedades existentes nas operações elementares do conjunto dos números reais e que irão ser demonstradas para matrizes de certo tipo, sendo que a demonstração seria a mesma para qualquer tipo:

- *Comutatividade*

$$A + B = B + A$$

Se A e B forem, por exemplo, matrizes 3×2, tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \\ b_{31}+a_{31} & b_{32}+a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Porque a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa

- <u>Associatividade</u>

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Sejam as matrizes 2×3 A, B e C

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & b_{13} + c_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) & a_{13} + (b_{13} + c_{13}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + b_{23}) & a_{23} + (b_{23} + c_{23}) \end{bmatrix} =$$

associatividade em $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} & (a_{13} + b_{13}) + c_{13} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} & (a_{23} + b_{23}) + c_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = (A + B) + C$$

- <u>*Existência de elemento neutro (a matriz nula)*</u>

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 & a_{13} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 & a_{23} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

Porque 0 é o elemento neutro da adição em $\mathbb{R}$

- <u>*Existência de simétrico*</u>

$$A + (-A) = 0$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ considera-se $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} & a_{12} - a_{13} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} & a_{23} - a_{23} \\ a_{31} - a_{31} & a_{32} - a_{32} & a_{33} - a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- <u>*Distributiva do produto por um escalar em relação à adição de matrizes.*</u>

$\alpha \times (A + B) = \alpha \times A + \alpha \times B$

$$\alpha(A + B) = \alpha \times \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \right) = \alpha \times \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) \\ \alpha(a_{31} + b_{31}) & \alpha(a_{32} + b_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \\ \alpha a_{31} + \alpha b_{31} & \alpha a_{32} + \alpha b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \\ \alpha b_{31} & \alpha b_{32} \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

❖ **Produto de Matrizes**

Duas matrizes só se podem multiplicar se o número de colunas da matriz correspondente ao 1º fator for igual ao número de linhas da matriz correspondente ao 2º fator. Ou seja, num produto $A \times B$, se A for do tipo 3×2 então B terá de ser do tipo 2×1, $2 \times 2 \; ou \; 2 \times 3$ sendo o resultado uma matriz do tipo $3 \times 1, 3 \times 2 \; ou 3 \times 3$, respetivamente. Vamos ver como calcular esse produto.

Ao nível do ensino secundário o produto de matrizes pode ser associado ao produto interno de vetores, representando cada linha/coluna das matrizes um vetor e cada entrada a_{ij} da matriz produto será o produto interno do vetor da linha i, da matriz que representa o primeiro fator, pelo vetor da coluna j, da matriz que representa o segundo fator.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

então

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} \end{bmatrix}$$

Esta operação de multiplicação de matrizes possui algumas propriedades que são o equivalente entre matrizes das operações utilizadas nas operações elementares do conjunto dos números reais:

- *Não Comutativa*

$$A \times B \neq B \times A$$

Vejamos que assim é.

- caso em que as matrizes não são quadradas

Neste caso apenas é possível fazer o produto num dos sentidos pois se for possível fazer $A \times B$ por A ser matriz n×m e B matriz p×n, com m,n,p todos distintos, fazendo com que $A \times B$ seja uma matriz n×n. Então ao fazer $B \times A$ teremos um produto de uma matriz p×n por uma matriz n×m o que faz com não se possa efetuar o produto. Mesmo no caso em que tal multiplicação seja possível, ou seja, o tipo das matrizes seja tal que que $m = p$, a propriedade comutativa não se verifica pois $A \times B$ é do tipo n×n enquanto que $B \times A$ é do tipo p× p logo não podem ser iguais.

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} & a_{11} \times b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} & a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} \\ a_{31} \times b_{11} + a_{32} \times b_{21} & a_{31} \times b_{12} + a_{32} \times b_{22} & a_{31} \times b_{13} + a_{32} \times b_{23} \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11} \times a_{11} + b_{12} \times a_{21} + b_{13} \times a_{31} & b_{11} \times a_{12} + b_{12} \times a_{22} + b_{13} \times a_{32} \\ b_{21} \times a_{11} + b_{22} \times a_{21} + b_{23} \times a_{32} & b_{21} \times a_{12} + b_{22} \times a_{22} + b_{23} \times a_{32} \end{bmatrix}$$

concluindo-se que $A \times B \neq B \times A$

- caso em que as matrizes são quadradas, mas se tem $A \times B \neq B \times A$

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 11 \\ 13 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 20 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$ concluindo-se que $A \times B \neq B \times A$

- *Associativa*

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Considerem-se, por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix}$, sendo que a demonstração para o caso geral seria similar a esta.

$$A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \times c_{11} & b_{11} \times c_{12} \\ b_{21} \times c_{11} & b_{21} \times c_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} \times c_{11} + a_{12} \times b_{21} \times c_{11} & a_{11} \times b_{11} \times c_{12} + a_{12} \times b_{21} \times c_{12} \\ a_{21} \times b_{11} \times c_{11} + a_{22} \times b_{21} \times c_{11} & a_{21} \times b_{11} \times c_{12} + a_{22} \times b_{21} \times c_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}) \times c_{11} & (a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}) \times c_{12} \\ (a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21}) \times c_{11} & (a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21}) \times c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} = (A \times B) \times C$$

- *Existência de elemento neutro (a matriz identidade)*

Sendo A uma matriz $n \times m$ tem-se que $A \times I_m = A$ e $I_n \times A = A$

$$A \times I_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times 1 + a_{12} \times 0 & a_{11} \times 0 + a_{12} \times 1 \\ a_{21} \times 1 + a_{22} \times 0 & a_{21} \times 0 + a_{22} \times 1 \\ a_{31} \times 1 + a_{32} \times 0 & a_{31} \times 0 + a_{32} \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = A$$

e

$$I_3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times a_{11} + 0 \times a_{21} + 0 \times a_{31} & 1 \times a_{12} + 0 \times a_{22} + 0 \times a_{32} \\ 0 \times a_{11} + 1 \times a_{21} + 0 \times a_{21} & 0 \times a_{12} + 1 \times a_{22} + 0 \times a_{32} \\ 0 \times a_{11} + 0 \times a_{21} + 1 \times a_{31} & 0 \times a_{12} + 0 \times a_{22} + 1 \times a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = A$$

- *Existência de inversa*

Na multiplicação nem sempre existe uma matriz B, tal que $A \times B = I$ e $B \times A = I$, mas em condições adequadas, que a seguir serão indicadas, uma matriz nas condições de B diz-se inversa de A.

Tem-se por isso que, quando A tem as características certas, existe uma matriz que se denomina inversa, se representa por A^{-1} e é tal que $A \times A^{-1} = I$ e $A^{-1} \times A = I$ e nestas circunstâncias diz-se que a matriz A é *invertível.*

Antes de indicar as condições em que uma matriz A é invertível é necessário definir o conceito de determinante.

O determinante de uma matriz A é número que depende apenas das entradas da matriz, representa-se por $|A|$ ou detA e permite-nos decidir se uma matriz é invertível ou não.

Vejamos como se calcula o determinante nas situações que poderão ser objeto de estudo no ensino secundário.

- Matrizes 1×1

  $|a_{11}| = a_{11}$

- No caso de uma matriz 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{21} \times a_{12})$$

O determinante de uma matriz 2×2 permite ainda, e tendo em conta que as entradas da matriz são as coordenadas dos vetores, afirmar que o determinante da matriz será zero se e só se os vetores representados (nas linhas ou colunas) da mesma forem colineares.
Isto prova-se pela definição de colinearidade :

(a,b) é colinear com (c,d) (com a,b,c,d ≠0) se e só se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ⇔ $ad = bc$ ⇔ $ad - bc = 0$

Sendo A a matriz cujas entradas são os vetores acima referidos: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ tem-se que $detA = 0$ ⇔ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ o que é equivalente, em ambos os casos, a $ad - bc = 0$

Caso alguma das coordenadas b ou d seja zero, não é possível indicar a fração na definição de colinearidade, no entanto a equivalência continua a ser válida, já que a definição de vetores colineares pode ser dada por $ad = bc$. Se $b = 0$ terá de se ter $a = 0$ *ou* $d = 0$. Se $d = 0$ então terá de ser $b = 0$ *ou* $c = 0$, e o determinante continuará a ser zero.

Logo (a,b) colinear a (c,d) se e só se det A = 0

- No caso de matrizes 3×3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Existem várias maneiras de calcular o determinante para as matrizes com número de linhas ou colunas superior a dois, o que caso deste trabalho é só o caso a matriz 3×3.

Assim o determinante pode ser calculado:

– diretamente, repetindo as colunas 1 e 2 de modo a facilitar o calculo, fazendo depois os produtos na diagonal, da esquerda para a direita com sinal positivo e da direita para a esquerda com sinal negativo, ou seja,

$$|A| = \begin{array}{c} + \quad\; + \quad\; + \quad\; - \quad\; - \quad\; - \\ \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \end{array} =$$

$$= a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

– utilizando os complementos algébricos ou cofatores, selecionando uma linha ou coluna e multiplicando cada elemento desta linha ou coluna, com o sinal positivo ou negativo consoante a soma das suas posições (nº de linha + nº de coluna) é par ou impar, pelo determinante da matriz que resulta de ter eliminado a linha e a coluna que contêm esse elemento:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

Linha 1+coluna 1= 2 (par) => sinal + linha 1+coluna2=3 (impar) => sinal - lin. 1+ col.3 =4 => sinal+

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Tal como no caso 2×2, também no caso das matrizes 3×3, se pode mostrar que o determinante da matriz será zero se e só se os vetores cujas coordenadas se encontram nas linhas/colunas da matriz forem complanares.

Feito este parêntese para a definição de determinante e voltando à existência de inversa, podemos dizer que uma matriz é invertível, ou seja, tem inversa quando é uma matriz quadrada e o seu determinante é diferente de zero.

❖ Verificar que A matriz tem de ser quadrada:

Seja A uma matriz retangular, por exemplo, 2×3, então para ser invertível teria de existir uma matriz inversa representada por A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = I$ e $A^{-1} \times A = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}a + a_{12}c + a_{13}e & a_{11}b + a_{12}d + a_{13}f \\ a_{21}a + a_{22}c + a_{23}e & a_{21}b + a_{21}d + a_{23}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} aa_{11} + ba_{21} & aa_{12} + ba_{22} & aa_{13} + ba_{23} \\ ca_{11} + da_{21} & ca_{12} + da_{22} & ca_{13} + da_{23} \\ ea_{12} + fa_{21} & ea_{12} + fa_{22} & ea_{13} + fa_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O que faria com que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ o que é absurdo pois duas matrizes de tipo diferente nunca podem ser iguais.

❖ Verificar que o determinante tem de ser diferente de zero

Seja uma matriz tal que $|A| = 0$

Para facilitar a demonstração considere-se uma matriz 2×2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Então $|\mathrm{A}| = 0$ é dizer que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, ou seja, $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$

Além disso a sua inversa será uma matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que

$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$

$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}w \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y + a_{12}w = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{cases}$$

Multiplicar por a_{12} a primeira equação e por $-a_{11}$ a terceira equação e adicioná-las

$$\cancel{a_{21}a_{11}}x + a_{21}a_{12}z = a_{21}$$

$$-\cancel{a_{11}a_{21}}x - a_{11}a_{22}z = 0$$

$$(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})x = a_{21}$$

dado que se partiu da hipótese de que $|A| = 0$, ou seja, $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$, logo $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = 0$ conclui-se que $a_{21} = 0$

Multiplicar por a_{21}a segunda equação e por $-a_{11}$ a quarta equação e adicioná-la

$$\cancel{a_{21}a_{11}}y + a_{21}a_{12}w = 0$$

$$-\cancel{a_{11}a_{21}}y - a_{11}a_{22}w = a_{11}$$

$$(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})w = a_{11}$$

dado que a hipótese é de que $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$, ou seja, $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = 0$ conclui-se que $a_{11} = 0$.

assim a matriz A teria obrigatoriamente uma coluna nula.

Desta forma $A \times A^{-1} = I \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{21}y & a_{21}w \\ a_{22}z & a_{22}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21}z = 1 \\ a_{21}w = 0 \\ a_{22}z = 0 \\ a_{22}w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_{21}z = 1 \\ a_{21} = 0 \vee w = 0 \\ a_{22} = 0 \vee z = 0 \\ a_{22}w = 1 \end{cases}$ se $a_{21} = 0$ então $a_{21}z = 1$ impossível; se $w = 0$ então $a_{22}w = 1$ impossível.

Logo conclui-se que ter-se-á de ter $|A| \neq 0$

Provou-se por isso que para uma matriz 2×2 ser invertível terá de ser uma matriz quadrada e cujo determinante tem de ser diferente de zero. Esta conclusão é também válida para matrizes 3×3, o que seria demonstrado por um raciocínio idêntico ao utilizado para o caso 2×2.

A determinação da matriz inversa pode ser feita de três formas diferentes:

- Diretamente através do sistema que sai da definição de inversa:

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}w \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y + a_{12}w = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y = -a_{12}w \\ a_{21}x = -a_{22}z \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ y = -\frac{a_{12}w}{a_{11}} \\ x = -\frac{a_{22}z}{a_{21}} \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -a_{11} \times \frac{a_{22}}{a_{21}}z + a_{12}z = 1 \\ \overline{\qquad} \\ \overline{\qquad} \\ -a_{21} \times \frac{a_{12}}{a_{11}}w + a_{22}w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})z = a_{21} \\ \overline{\qquad} \\ \overline{\qquad} \\ (-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11})w = a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = \frac{a_{21}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \\ y = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\left(\frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}\right) \\ x = -\frac{a_{22}}{a_{21}}\left(\frac{a_{21}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}\right) \\ w = \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y = \frac{-a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ x = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ w = \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} \end{cases}$$

e, assim $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}$

- Método de simplificação da matriz (condensação)

Iniciar com uma matriz $[A \mid I]$ e chegar a uma matriz $[I \mid A^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} + a_{22} & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{array}\right] =$$

Dividir 1ª linha por a_{11} adicionar 1ª linha $\times (-a_{21})$ com a 2ª linha

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}} \times \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{array}\right] =$$

Dividir a 2ª linha por $\frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \times \frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \times \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{array}\right] =$$

Adicionar 1ª linha com a 2ª $\times \left(-{}^{a_{12}}/_{a_{11}}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + a_{12}a_{21}}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{array}\right]$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}$

- Usando os complementos algébricos

$$AA^{-1} = I \;\Leftrightarrow\; A^{-1} = \frac{[complementos\ algébricos]^T}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|a_{22}| & (-1)^{1+2}|a_{21}| \\ (-1)^{2+1}|a_{12}| & (-1)^{2+2}|a_{11}| \end{bmatrix}^T}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^T}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix}$

Pode verificar-se que esta é realmente a matriz inversa fazendo o produto $A \times A^{-1}$ e $A^{-1} \times A$, no qual se deverá obter a matriz identidade.

Assim $A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{12}(-a_{21})}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}(-a_{12})}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{12}a_{11}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{22}(-a_{21})}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{21}(-a_{12})}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{22}a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{12}a_{11}-a_{11}a_{12}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{21}a_{22}-a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{0}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{0}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times A = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{22}a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{-a_{12}a_{22}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{11}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} + \frac{a_{11}a_{22}}{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{22}a_{12}-a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}a_{11}+a_{11}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O processo de determinação da matriz utilizando os complementos algébricos só se mostra realmente útil para matrizes do tipo igual ou superior a 3×3, onde os outros processos são mais "pesados" e morosos, como se pode ver de seguida para o caso 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}^T}{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})} =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} & a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}^T}{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})} =$$

$$\frac{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}}{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})}$$

Existem algumas matrizes, denominadas matrizes **ortogonais**, para as quais determinar a inversa é mais simples, pois a sua inversa é igual à sua transposta, ou seja, $A^T = A^{-1}$.

Veja-se quais as características das matrizes ortogonais:

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz ortogonal, ou seja, uma matriz tal que

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

Desta forma tem-se

$$A \times A^{-1} = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} = 0 \\ {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 = 1 \end{cases}$$ ou seja, em termos de vetores o que quer dizer é que:

- Pelas primeira e a última equações, os vetores representados nas linhas têm norma um, ou seja, são vetores de unitários.
- Pelas segunda e terceira equações, os vetores representados nas duas linhas têm produto interno zero, ou seja, são perpendiculares.

Assim sendo as matrizes ortogonais são as que nas suas linhas/colunas têm vetores de norma um, perpendiculares.

Conteúdos do secundário onde podem ser aplicadas as matrizes

Esta dissertação tem como propósito analisar os conteúdos dos programas do ensino secundário onde poderiam ser introduzidas as matrizes, seguem-se, por isso, algumas dessas situações.

1) *Equação de uma reta dados dois pontos*

Dados os pontos $A(x_a,\ y_a)$ e $B(x_b,\ y_b)$ a equação geral da reta, pode ser determinada do seguinte:

- Usando os processos atualmente estudados no 10º ano:

  $y - y_a = m(x - x_a) \Leftrightarrow y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a)$, em que $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ representa o declive da reta.

- Utilizando matrizes:

  basta pensar que se a reta passa pelos pontos A e B estes são colineares se pensarmos num terceiro ponto P (x, y) na mesma reta, ou seja colinear com os outros dois, então os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares, ou seja, a matriz cujas linhas são os valores destes vetores tem determinante zero.

  Tem-se deste modo que

  $$\begin{vmatrix} x - x_a & y - y_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x_a)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y - y_a) = 0 \Leftrightarrow$$

  $$y - y_a = \frac{(x - x_a)(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

Veja-se um exemplo:

Sejam A (2, -1) e B (-5,3) a reta que passa nestes pontos pode ser calculada por:

$$y - (-1) = \frac{(3-(-1))(x-2)}{(-5-2)} \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{4}{7}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{7}x + \frac{8}{7} - 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{4}{7}x + \frac{1}{7}}$$

Ou, usando matrizes

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - (-1) \\ -5 - 2 & 3 - (-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \times 4 - (-7) \times (y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x - 8 + 7y + 7 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{4}{7}x + \frac{1}{7}}$$

2) *Plano definido por três pontos.*

Dados os pontos A (x_a, y_a, z_a), B (x_b, y_b, z_b) e C (x_c, y_c, z_c), uma equação do plano pode ser determinada :

- De duas formas diferentes utilizando os conteúdos lecionados atualmente no ensino secundário:
  - Determinando o vetor normal ao plano $\vec{n}$

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \qquad \overrightarrow{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a)$$
$$\vec{n} = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x_b - x_a) + y(y_b - y_a) + z(z_b - z_a) = 0 \\ x(x_c - x_a) + y(y_c - y_a) + z(z_c - z_a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xx_a - xx_b + yy_b - yy_a + zz_b - zz_a = 0 \\ xx_c - xx_a + yy_c - yy_a + zz_c - zz_a = 0 \end{cases}$$

- Utilizando a equação geral $Ax + By + Cz + D = 0$ e substituindo sucessivamente os três pontos.
$$\begin{cases} Ax_a + By_a + Cz_a + D = 0 \\ Ax_b + By_b + Cz_b + D = 0 \\ Ax_c + By_c + Cz_c + D = 0 \end{cases}$$

- Utilizando matrizes:

  Sejam os vetores $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$ $\overrightarrow{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a)$

  O plano que passa na origem e em B e C é dado por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow [x(y_b - y_a)(z_c - z_a)] + [y(z_b - z_a)(x_c - x_a)][z(x_b - x_a)(y_c - y_a)] -$$

$$- [z(y_b - y_a)(x_c - x_a)] - [y(x_b - x_a)(z_c - z_a)] - [x(z_b - z_a)(y_c - y_a)] = 0$$

Obter-se-á uma equação do tipo $Ax + By + Cz = 0$ do plano paralelo a ABC a passar no ponto (0,0,0), para obter a equação do plano que passa em A basta substituir as coordenadas do ponto A na equação geral do plano ($Ax + By + Cz + D = 0$), determinar o valor de D e assim chegar a uma equação do plano definido pelos pontos A,B e C

<u>Um exemplo:</u>

A(3,2,1) B(-1,4,-1) C(2,-2,3)

Utilizando o vetor normal:

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 4 - 2, -1 - 1) = (-4, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, -2 - 2, 3 - 1) = (-1, -4, 2)$$

$$\vec{n} = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} (x,y,z).(-4,2,-2) = 0 \\ (x,y,z).(-1,-4,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x = -4y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(-4y + 2z) + y - z = 0 \\ x = -4y + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y - 4z + y - z = 0 \\ x = -4y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y - 5z = 0 \\ x = -4y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{9}z \\ x = -4\left(\frac{5}{9}z\right) + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{9}z \\ x = -\frac{20}{9}z + \frac{18}{9}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{9}z \\ x = -\frac{2}{9}z \end{cases}$$

Supondo $z = 9$ então ter-se-á $y = 5$ e $x = -2$, ou seja, um vetor normal ao plano será $\vec{n} = (-2,5,9)$

assim a equação do plano pode ser determinado por $-2(x - 3) + 5(y - 2) + 9(z - 1) = 0$ ou $-2x + 5y + 9z - 13 = 0$

Utilizando a equação geral:

$$\begin{cases} 3A + 2B + C + D = 0 \\ -A + 4B - C + D = 0 \\ 2A - 2B + 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ D = A - 4B + C \\ D = -2A + 2B - 3C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ -3A - 2B - C = A - 4B + C \\ A - 4B + C = -2A + 2B - 3C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ -3A - 2B - C - A + 4B - C = 0 \\ A - 4B + C + 2A - 2B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ -4A + 2B - 2C = 0 \\ 3A - 6B + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ -2A + B - C = 0 \\ 3A - 6B + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = 2A + C \\ 3A - 6(2A + C) + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = 2A + C \\ 3A - 12A - 6C + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = 2A + C \\ -9A - 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = 2A + C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = 2\left(-\frac{2}{9}C\right) + C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -3A - 2B - C \\ B = -\frac{4}{9}C + \frac{9}{9}C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D = -3\left(-\frac{2}{9}C\right) - 2\left(\frac{5}{9}C\right) - C \\ B = \frac{5}{9}C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{6}{9}C - \frac{10}{9}C - \frac{9}{9}C \\ B = \frac{5}{9}C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\frac{13}{9}C \\ B = \frac{5}{9}C \\ A = -\frac{2}{9}C \end{cases}$$ fazendo $C = 9$, tem-se

$A = -2,\ B = 5$ e $D = -13$

Pelo que uma equação do plano será:

$$-2x + 5y + 9z - 13 = 0$$

Utilizando as matrizes:

$\overrightarrow{AB} = (-4, 2, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (-1, -4, 2)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 16z + 2z - 8x + 8y = 0 \Leftrightarrow -4x + 10y + 18z = 0 \Leftrightarrow$$

$-2x + 5y + 9z = 0$, uma equação do plano definido pelos ponto (0,0,0), B e C.

substituindo as coordenadas de A (3,2,1) na equação geral

$-2 \times 3 + 5 \times 2 + 9 \times 1 + D = 0 \Leftrightarrow -6 + 10 + 9 + D = 0 \Leftrightarrow D = 13$

Logo uma equação do plano definido por A, B e C será:

$$-2x + 5y + 9z - 13 = 0$$

3) Área de polígonos

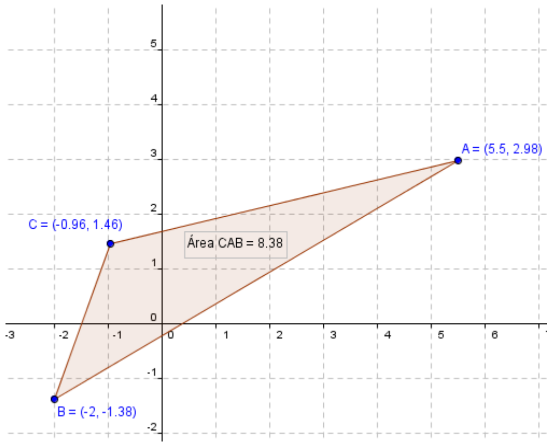
- Triângulo

Área de um triângulo dados os seus vértices A, B e C usando os conteúdos atualmente lecionados no ensino secundário teria de ser feita determinando as distâncias d(A,B), d(B,C) e d(A,C) e, além disso, no caso de não se tratar de um triângulo retângulo ou isósceles ou com alguns ângulos conhecidos, esta tarefa pode tornar-se complicada para este nível de ensino, por não ser fácil determinar a altura do triângulo. Isto significa ter de restringir os triângulos para os quais é possível determinar a área neste nível de ensino.
No entanto utilizando as matrizes, achar a área do triângulo, qualquer que ele seja e conhecendo apenas os seus vértices, torna-se muito mais simples. É necessário determinar $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ dois dos vetores cujos extremos são vértices do triângulo e que têm a mesma origem (poder-se-ia considerar $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BA}$, ou, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$):
$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a)$.

A área do triângulo será metade do módulo do determinante da matriz cujas linhas são os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja, $A_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}\right|$.
porque se sabe que a área de um triângulo é metade da área de um retângulo ou paralelograma cujos vértices incluem os três vértices do triângulo.

<u>Um exemplo:</u>

$A = (5{,}5; 2{,}98)$
$B = (-2;\ -1{,}38)$
$C = (-0{,}96; 1{,}46)$



$\overrightarrow{AB} = (-2 - 5{,}5;\ -1{,}38 - 2{,}98) = (-7{,}5;\ -4{,}36)$

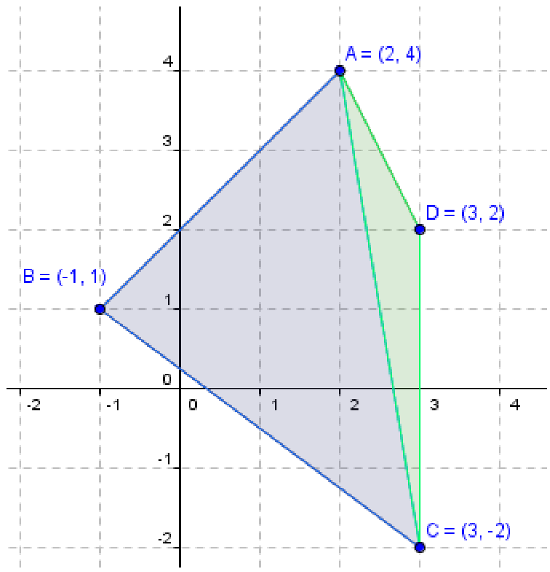
$\overrightarrow{AC} = (-0{,}96 - 5{,}5;\ 1{,}46 - 2{,}98) = (-6{,}46; -1{,}52)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -7{,}5 & -4{,}36 \\ -6{,}46 & -1{,}52 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|11{,}4 - 28{,}1656| =$$

$$= \frac{1}{2}|-16{,}7656| = 8{,}3828 \approx 8{,}38$$

- *<u>Quadrilátero</u>*

É fácil para os alunos do secundário determinar a área de quadrados, paralelogramos, retângulos, losangos e trapézios, pois existem fórmulas próprias para tal, mas se o quadrilátero não se enquadrar nestas categorias é necessário fazer a sua decomposição em triângulos.
Utilizando as matrizes é possível determinar a área de qualquer quadrilátero conhecendo apenas as coordenadas dos seus vértices.
Se o quadrilátero em causa for um paralelogramo ou um retângulo bastará determinar $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ e $\overrightarrow{AD} = (x_c - x_a, y_c - y_a)$ e determinar o determinante da matriz cujas linhas são os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$



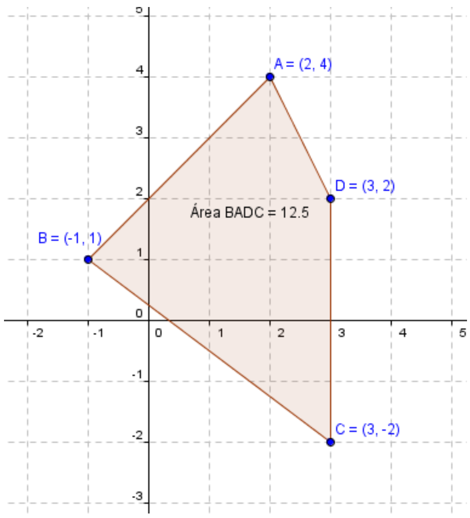
$$A_{[ABCD]} = \left|\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}\right|$$

No caso de se tratar de qualquer outro quadrilátero bastará fazer o cálculo da área dos triângulos [ABC] e [CDA]. Claro que este processo também pode ser aplicado no caso dos retângulos e paralelogramos.
(note-se que a escolha dos triângulos segue a ordem alfabética dos vértices para não haver repetições de vértices)

$$\boldsymbol{A_{\Delta[ABCD]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDA]}}$$

Um exemplo:

$\Delta[ABC]$



$\overrightarrow{AB} = (-1,1) - (2,4) = (-3,-3)$
$\overrightarrow{AC} = (3,-2) - (2,4) = (1,-6)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|18 - (-3)| = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

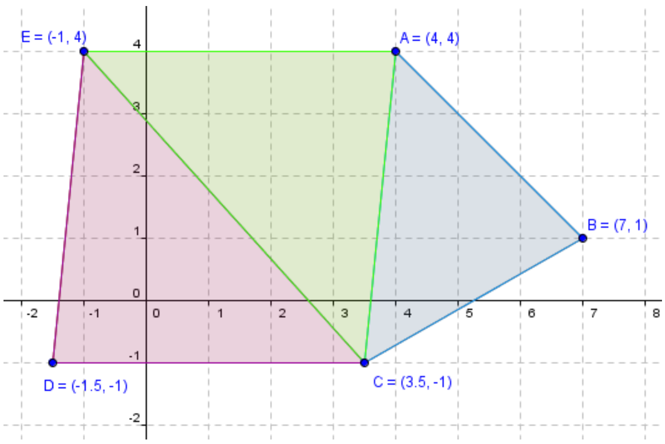
$\Delta[CDA]$

$\overrightarrow{CD} = (3,2) - (3,-2) = (0,4)$
$\overrightarrow{CA} = (2,4) - (3,-2) = (-1,6)$

$$A_{\Delta[CDA]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|0 - (-4)| = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boldsymbol{A_{\Delta[ABCD]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDA]} = 10{,}5 + 2 = 12{,}5}$$

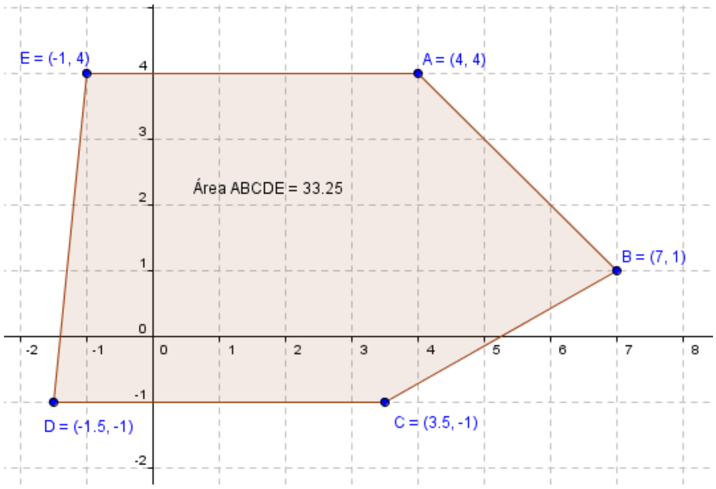
- *Pentágono*



A área do pentágono pode ser calculada dividindo o mesmo em triângulos. Sendo A,B,C,D e E os vértices do pentágono basta calcular a área dos triângulos [ABC], [CDE] e [EAC]

$$\boldsymbol{A_{[ABCDE]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDE]} + A_{\Delta[EAC]}}$$

Um exemplo:



$\Delta[ABC]$

$\overrightarrow{AB} = (7,1) - (4,4) = (3,-3)$
$\overrightarrow{AC} = (3{,}5;\ -1) - (4,4) = (-0{,}5;\ -5)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -0{,}5 & -5 \end{vmatrix}\right| =$$

$$\frac{1}{2}|-15 - 1{,}5| = \frac{16{,}5}{2} = 8{,}25$$

$\Delta[CDE]$

$\overrightarrow{CD} = (-1{,}5;\ -1) - (3{,}5;\ -1) = (-5;\ 0)$
$\overrightarrow{CE} = (-1,4) - (3{,}5;\ -1) = (-4{,}5;\ 5)$

$$A_{\Delta[CDE]} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -5 & 0 \\ -4{,}5 & 5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-25-0| = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

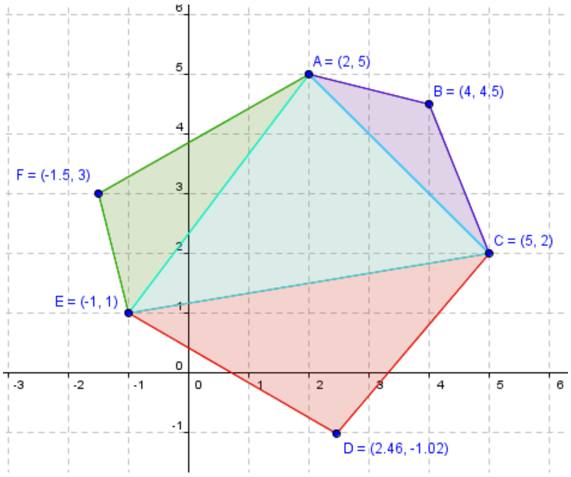
$\Delta[EAC]$

$\overrightarrow{EA} = (4,4) — (-1{,}4) = (5,0)$
$\overrightarrow{EC} = (3{,}5;\ -1) — (-1{,}4) = (4{,}5;\ -5)$

$$A_{\Delta[EAC]} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 5 & 0 \\ 4{,}5 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-25-0| = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

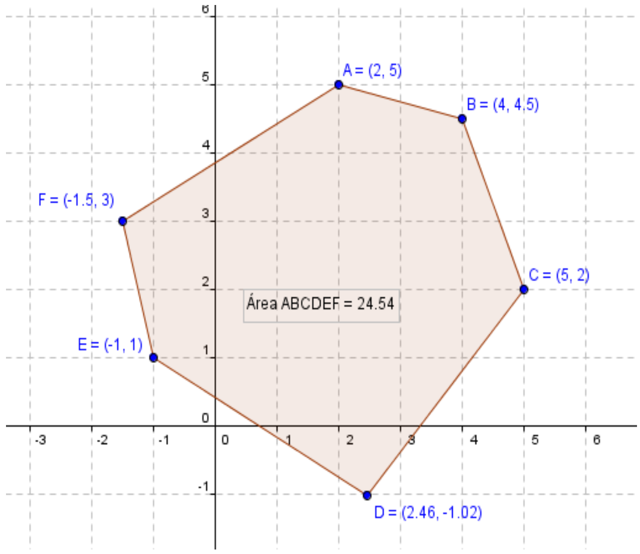
$$\boldsymbol{A_{\Delta[ABCDE]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDE]} + A_{\Delta[EAC]} = 8{,}25 + 12{,}5 + 12{,}5 = 33{,}25}$$

- *Hexágono*



O hexágono pode ser dividido em quatro triângulos. A melhor forma de não haver enganos será seguir a ordem alfabética dos seus vértices, iniciando sempre a sequência pelo último do triângulo anterior, ou seja, [ABC], [CDE], [EFA] e [ACE] sendo que o último triângulo é formado pelos vértices indicados no inicio dos outros três.

Um exemplo



$\Delta[ABC]$

$\overrightarrow{AB} = (4; 4{,}5) - (2,5) = (2;\ -0{,}5)$
$\overrightarrow{AC} = (5,2) - (2,5) = (3,-3)$

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 2 & -0{,}5 \\ 3 & -3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-6-(-1{,}5)|$$
$$= \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$$

$\Delta[CDE]$

$\overrightarrow{CD} = (2{,}46;\ -1{,}02) - (5,2) = (-2{,}54; -3{,}02)$
$\overrightarrow{CE} = (-1,1) - (5,2) = (-6,-1)$

$$A_{\Delta[CDE]} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2{,}54 & -3{,}02 \\ -6 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|2{,}54 - 18{,}12| = \frac{15{,}58}{2} = 7{,}79$$

$\Delta[EFA]$

$\overrightarrow{EF} = (-1{,}5; 3) - (-1{,}1) = (-0{,}5; 2)$
$\overrightarrow{EA} = (2,5) - (-1{,}1) = (3,4)$

$$A_{\Delta[EFA]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -0,5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-2-6| = \frac{8}{2} = 4$$

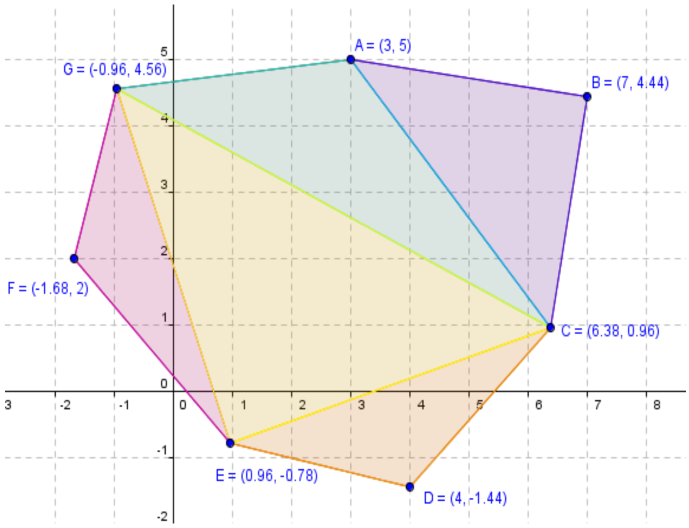
$\Delta[ACE]$

$$\overrightarrow{AC} = (3,-3)$$
$$\overrightarrow{AE} = (-1,1) - (2,5) = (-3,-4)$$

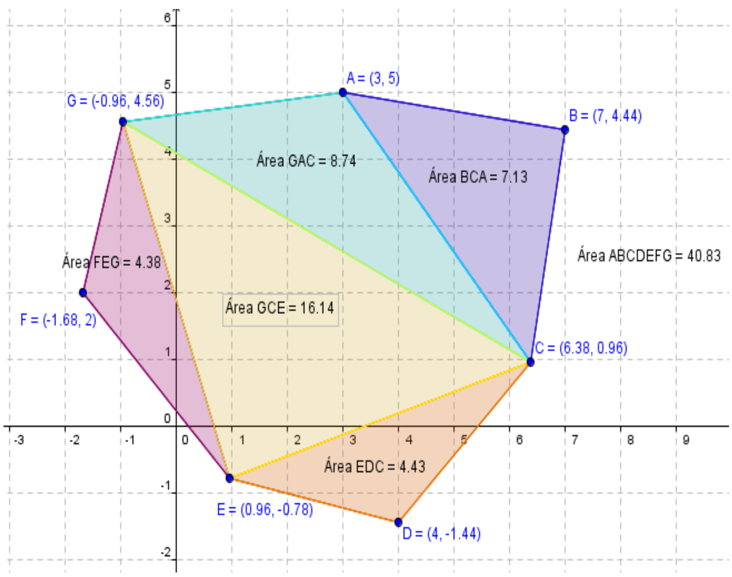
$$A_{\Delta[ACE]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-12-9| = \frac{21}{2} = 10,5$$

$$\boldsymbol{A_{\Delta[ABCDEF]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDE]} + A_{\Delta[EFA]} + A_{\Delta[ACE]} = 2,25 + 7,79 + 4 + 10,5 = 24,54}$$

- Heptágono



O heptágono pode ser dividido em quatro triângulos. A melhor forma de não haver enganos será seguir a ordem alfabética dos seus vértices, iniciando sempre a sequencia pelo último do triângulo anterior, ou seja, [ABC], [CDE] e [EFA] sendo os dois outros triângulos formados pelos vértices extremos dos triângulos anteriores, começando no último e seguindo a ordem alfabética, ou seja, [GAC] e [CEG]



<u>Um exemplo:</u>

$\boldsymbol{\Delta[ABC]}$

$$\overrightarrow{AB} = (7;4{,}44) - (3{,}5) = (4;-0{,}56)$$
$$\overrightarrow{AC} = (6{,}38;0{,}96) - (3;5) = (3{,}38;\ -4{,}04)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -0{,}56 \\ 3{,}38 & -4{,}04 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-16{,}16 - (-1{,}8928)| = \frac{|-14{,}2672|}{2} \approx 7{,}13$$

$\boldsymbol{\Delta[CDE]}$

$$\overrightarrow{CD} = (4;-1{,}44) - (6{,}38;0{,}96) = (-2{,}38;\ -2{,}4)$$
$$\overrightarrow{CE} = (0{,}96;\ -0{,}78) - (6{,}38;0{,}96) = (-5{,}42;\ -1{,}74)$$

$$A_{\Delta[CDE]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2{,}38 & -2{,}4 \\ -5{,}42 & -1{,}74 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|4{,}1412 - 13{,}008| = \frac{|-8{,}8668|}{2} \approx 4{,}43$$

$\boldsymbol{\Delta[EFG]}$

$\overrightarrow{EF} = (-1{,}68; 2) - (0{,}96;\ -0{,}78) = (-2{,}64; 2{,}78)$
$\overrightarrow{EG} = (-0{,}96; 4{,}56) - (0{,}96;\ -0{,}78) = (-1{,}92; 5{,}34)$

$$A_{\Delta[EFG]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2{,}64 & 2{,}78 \\ -1{,}92 & 5{,}34 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-14{,}0976 - (-5{,}3376)| = \frac{8{,}76}{2} = 4{,}38$$

$\Delta[\boldsymbol{GAC}]$

$\overrightarrow{GA} = (3; 5) - (-0{,}96; 4{,}56) = (3{,}96; 0{,}44)$
$\overrightarrow{GC} = (6{,}38;\ 0{,}96) - (-0{,}96; 4{,}56) = (7{,}34;\ -3{,}6)$

$$A_{\Delta[GAC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3{,}96 & 0{,}44 \\ 7{,}34 & -3{,}6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-14{,}256 - 3{,}2296| = \frac{17{,}4856}{2} \approx 8{,}74$$

$\Delta[\boldsymbol{CEG}]$

$\overrightarrow{CE} = (0{,}96;\ -078) - (6{,}38; 0{,}96) = (-5{,}42;\ -1{,}74)$
$\overrightarrow{CG} = (-0{,}96; 4{,}56) - (6{,}38; 0{,}96) = (-7{,}34; 3{,}6)$

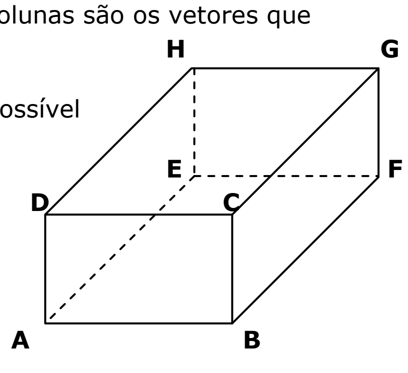
$$A_{\Delta[CEG]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -5{,}42 & -1{,}74 \\ -7{,}34 & 3{,}6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-19{,}512 - 12{,}7716| = \frac{32{,}2836}{2} \approx 16{,}14$$

$$\boldsymbol{A_{[ABCDEFG]} = A_{\Delta[ABC]} + A_{\Delta[CDE]} + A_{\Delta[EFG]} + A_{\Delta[GAC]} + A_{\Delta[CEG]} = 7{,}13 + 4{,}43 + 4{,}38 + 8{,}74 + 16{,}14 = 40{,}82}$$

Pode desta forma calcular-se a área de qualquer polígono (de n lados) sabendo as coordenadas dos seus vértices dividindo-o em triângulos (n-2) cujos vértices vão sendo, por ordem alfabética, iniciados no último do triângulo anterior, até terminarem os vértices, iniciando depois uma segunda volta em que os vértices de cada triângulo são os primeiro e último dos anteriores, e segue-se este tipo de raciocínio até termos todas as hipóteses possíveis, calculando a área desses triângulos utilizando as matrizes.

4) Volume de um paralelepípedo

Para calcular o volume de um paralelepípedo é necessário determinar o comprimento das três dimensões distintas do sólido e efetuar o seu produto. É também possível calcular esse volume usando o determinante da matriz cujas linhas/colunas são os vetores que representam as três dimensões do sólido.

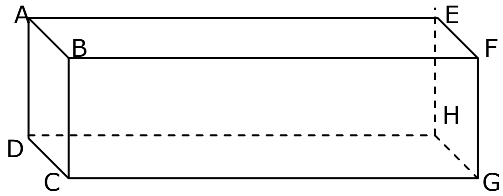


Assim, dado o seguinte paralelepípedo [ABCDEFGH] é possível determinar o seu volume utilizando as matrizes. Para ta basta determinar os vetores correspondentes às três dimensões distintas do paralelepípedo, ou seja, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$

O volume será dado por:

$$V = \left|\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \\ x_e - x_a & y_e - y_a & z_e - z_a \end{vmatrix}\right|$$

Um exemplo:



considerar o paralelepípedo da figura
em que
$A\,(2,-1,5)\quad B(3,-1,6)\quad D\,(3,-1,4)$
$e\;\; E(2,7,5)$
determinar os vetores

$\overrightarrow{AB} = (3,-1,6) - (2,-1,5) = (1,0,1)$
$\overrightarrow{AD} = (3,-1,4) - (2,-1,5) = (1,0,-1)$
$\overrightarrow{AE} = (2,7,5) - (2,-1,5) = (0,8,0)$

$$V = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \end{matrix} \right\| = |(0+0+8) - (0-8+0)| = |8+8| = 16$$

Volume de uma pirâmide

É possível utilizar o mesmo processo descrito para o paralelepípedo para calcular o volume de uma pirâmide cuja base é igual a uma das faces de um paralelepípedo. Basta para isso dividir por três o volume do paralelepípedo, já que nestas condições está provado que $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_{prisma}$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \\ x_e - x_a & y_e - y_a & z_e - z_a \end{matrix} \right\|$$

5) Resolução de sistemas

Sistema de duas equações com duas incógnitas

Pode resolver-se um sistema utilizando as matrizes.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

O sistema resolvido como o fazem atualmente no ensino secundário seria por substituição:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c-by}{a} \\ \frac{d(c-by)}{a} + ey = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c-by}{a} \\ dc - dby + aey = fa \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{c-by}{a} \\ (ae-db)y = fa - dc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = c - by \\ y = \frac{fa-dc}{ae-db} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = c - b\left(\frac{fa-dc}{ae-db}\right) \\ y = \frac{fa-dc}{ae-db} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{cae-cdb-bfa+bdc}{a(ae-db)} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{cas-bfa}{a(ae-db)} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{cs-bf}{ae-db} \\ y = \frac{fa-dc}{ae-db} \end{cases}$$

Se forem utilizadas as matrizes tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ d & e & f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & e-\frac{db}{a} & f-\frac{dc}{a} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & \frac{ea-db}{a} & \frac{fa-dc}{a} \end{array}\right]$$

Dividir a 1ª linha por a 1ª linha × (-a) somada com a 2ª

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{fa-dc}{a}\times\frac{a}{ea-db} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{c}{a}-\frac{b}{a}\times\frac{fa-dc}{ea-db} \\ 0 & 1 & \frac{fa-dc}{ea-db} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{cea-cdb-bfa+bdc}{aea-adb} \\ 0 & 1 & \frac{fa-dc}{ea-db} \end{array}\right] =$$

2ª linha dividida por $\frac{ea-db}{a}$ 2ª linha multiplicada por $-\frac{b}{a}$ somada com a 1ª

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{cea-bfa}{aea-adb} \\ 0 & 1 & \frac{fa-dc}{ea-db} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{ce-bf}{ea-db} \\ 0 & 1 & \frac{fa-dc}{ea-db} \end{array}\right]$$

assim $x = \frac{ce-bf}{ea-db}$ e $y = \frac{fa-dc}{ea-db}$

<u>Sistema de três equações com três incógnitas</u>

No sistema de três equações a três incógnitas nota-se mais a vantagem de utilizar este processo pois a resolução por substituição torna-se bem mais longa e o método de adição ordenada sem recorrer a matrizes leva à utilização de vários cálculos auxiliares.

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases}$$

Dado que a resolução de algum dos três processos me parece ser muito pesada no caso geral e tendo em conta os objetivos deste trabalho, parece-me mais útil utilizar um exemplo concreto.

Exemplo:

Seja o sistema $\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+y-3z=2 \\ x+2z=1 \end{cases}$ cuja matriz será $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$

- Pelo método de substituição:

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+y-3z=2 \\ x+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2z-y-z=1 \\ 1-2z+y-3z=2 \\ x=1-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3z-y=1 \\ 1-5z+y=2 \\ x=1-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3z-y=0 \\ y=2-1+5z \\ x=1-2z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3z-1-5z=0 \\ y=1+5z \\ x=1-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8z=1 \\ y=1+5z \\ x=1-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{8} \\ y=1+5\times\left(-\frac{1}{8}\right) \\ x=1-2\times\left(-\frac{1}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{8} \\ y=\frac{3}{8} \\ x=\frac{10}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{1}{8} \\ y=\frac{3}{8} \\ x=\frac{5}{4} \end{cases}$$

A solução do sistema é $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$

- Utilizando o método da adição ordenada:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 4z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - 4z = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2 \times \frac{5}{4} - 4z = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

C.A.

$$\begin{array}{c} x - y - z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \\ \hline 2x - 4z = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x - 4z = 3 \\ 2x + 4z = 2 \\ \hline 4x = 5 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 10 - 16z = 12 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ z = -\frac{2}{16} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} - y - \left(-\frac{1}{8}\right) = 1 \\ z = -\frac{1}{8} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 8y + 1 = 8 \\ z = -\frac{1}{8} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{8} \\ z = -\frac{1}{8} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

A solução do sistema é $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$

utilizando matrizes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & -1/2 \end{array}\right]$$

2ª linha = 1ª linha + 2ª linha   2ª linha/2   3ª linha = 3ªlinha - 2ªlinha

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10/8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right]$$

3ª linha/4   1ªlinha = 1ª + 2ª   2ª linha = 2ª + 3ª   1ªlinha = 2ª + 2×2ª

A solução é $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$

6) Isometrias

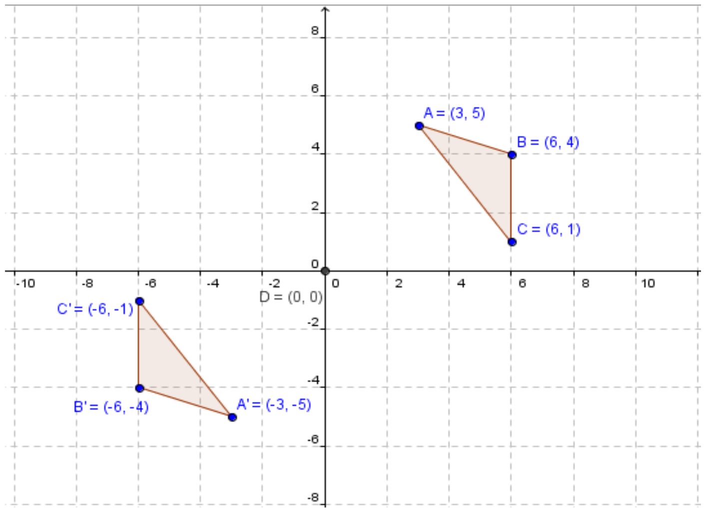
As isometrias são transformações geométricas que mantêm, como o próprio nome indica, as medidas, ou seja mantêm a forma e as dimensões das figuras às quais são aplicadas. Trata-se portanto de transformações que apenas deslocam a figura.

- **Reflexões**

São isometrias feitas em relação a um eixo (simetria axial) ou em relação a um ponto.

- <u>Em relação à origem</u>

Dado que na prática uma reflexão em relação à origem corresponde a passar ao simétrico as coordenadas dos vértices do polígono, tal pode ser feito multiplicando a matriz das coordenadas do polígono por uma matriz diagonal cujas entradas são iguais a -1.



$$\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{a_1} & -\boldsymbol{b_1} & -\boldsymbol{c_1} \\ -\boldsymbol{a_2} & -\boldsymbol{b_2} & -\boldsymbol{c_2} \end{bmatrix}$$

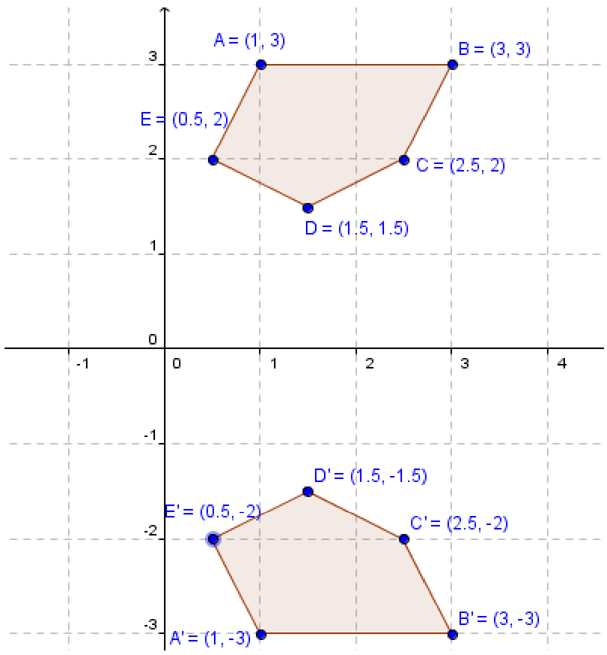
No exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Sendo os vértices da imagem: $A' = (-3, -5)$

$B' = (-6, -4) \;\; e \;\; C' = (-6, -1)$

- <u>Em relação ao eixo horizontal</u>



Uma reflexão cujo eixo de simetria é o eixo das abcissas consiste em passar ao simétrico as ordenadas dos vértices, o que pode ser feito multiplicando a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vértices por uma matriz diagonal em que as entradas da diagonal são 1 e -1 respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ -\boldsymbol{a_2} & -\boldsymbol{b_2} & -\boldsymbol{c_2} \end{bmatrix}$$

No exemplo:

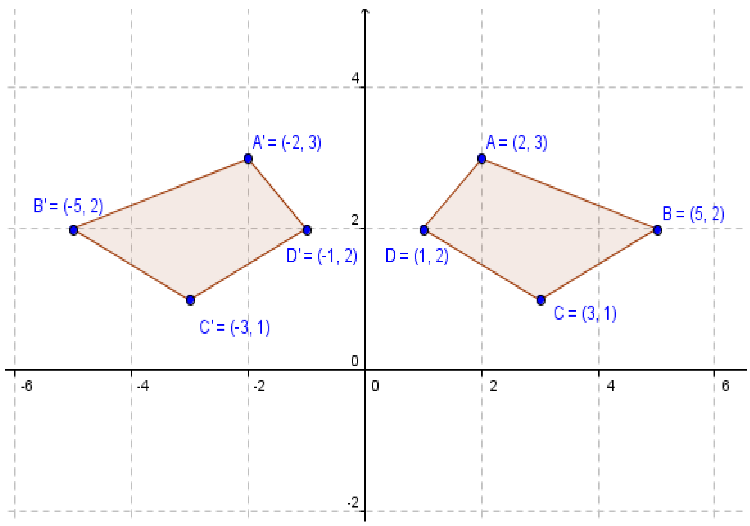
Eixo de simetria: $y = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2,5} & \mathbf{1,5} & \mathbf{0,5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1,5} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2,5} & \mathbf{1,5} & \mathbf{0,5} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{3} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1,5} & -\mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Os vértices do novo polígono são:

$A' = (1, -3) \quad B' = (3,\ -3) \quad C' = (2{,}5;\ \ -2) \quad D' = (1{,}5;\ \ 1{,}5) \;\; E' = (0{,}5;\ \ -2)$

- <u>Em relação ao eixo vertical</u>



Uma reflexão que tem como eixo de simetria o eixo das ordenadas o que faz aos vértices do polígono é passar para o simétrico a abcissa e deixar igual a ordenada. Se pensarmos em termos de matrizes trata-se de multiplicar a matriz que tem como colunas as coordenadas dos vértices do polígono por uma matriz diagonal 2×2 cujas entradas são -1 e 1 respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-a_1} & \boldsymbol{-b_1} & \boldsymbol{-c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \end{bmatrix}$$

No exemplo:

Eixo de simetria: $x = 0$

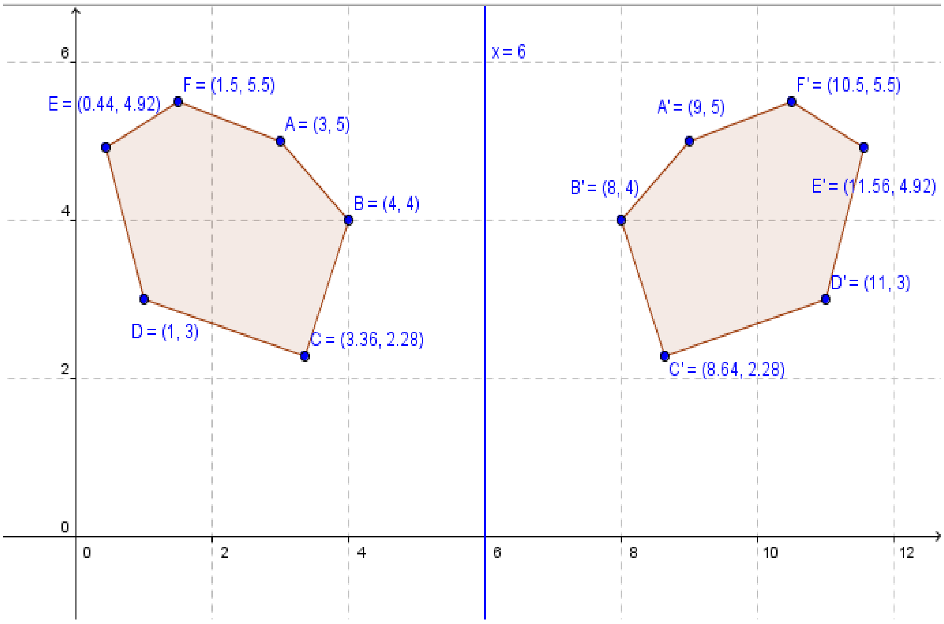
$$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Os vértices do novo polígono são:

$A' = (-2, 3) \quad B' = (-5,\ 2) \quad C' = (-3,\ 1) \quad D' = (-1, 2)$

- <u>Em relação a uma qualquer reta vertical</u>

Sabendo que qualquer reta vertical é do tipo $x = k$ então trata-se de manter as ordenadas e passar a abcissa para o simétrico adicionando-lhe 2k. Em termos de matrizes significa multiplicar, a matriz cujas linhas são os vértices do polígono, por uma matriz diagonal 2×2 , $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e adicionar-lhe uma matriz com tantas colunas quantos os vértices do polígono e com a primeira linha igual a 2k e a segunda igual a 0.



No exemplo:

Eixo de simetria: $x = 6$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3{,}36 & 1 & 0{,}44 & 1{,}5 \\ 5 & 4 & 2{,}28 & 3 & 4{,}92 & 5{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -3{,}36 & -1 & -0{,}44 & -1{,}5 \\ 5 & 4 & 2{,}28 & 3 & 4{,}92 & 5{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8{,}64 & 11 & 11{,}56 & 10{,}5 \\ 5 & 4 & 2{,}28 & 3 & 4{,}92 & 5{,}5 \end{bmatrix}$$

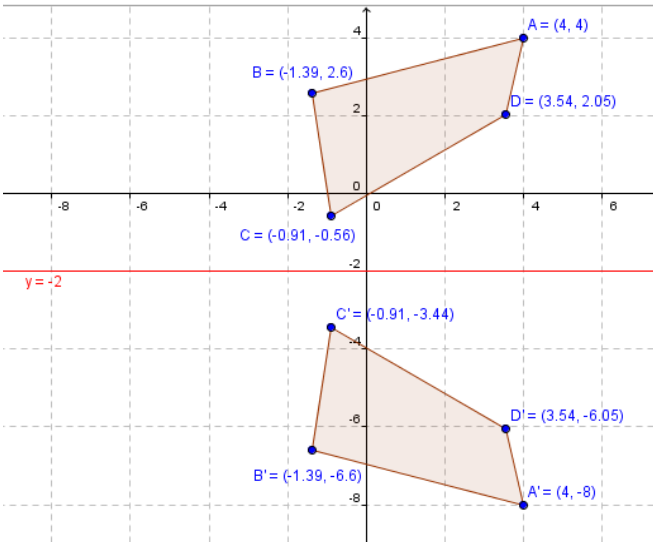
Os vértices do novo polígono são:

$A' = (9, 5) \quad B' = (8, 4) \quad C' = (8{,}64; 2{,}28) \quad D' = (11, 3) \quad E' = (11{,}56;\ \ 4{,}92) \quad F' = (10{,}5;\ \ 5{,}5)$

- <u>Em relação a uma qualquer reta horizontal</u>

Uma reta vertical é do tipo $y = k$ pelo que os vértices vão ficar com a mesma abcissa e a ordenada passa para o simétrico adicionado de 2k. Se usarmos matrizes tem-se a matriz cujas colunas são os vértices do polígono, multiplicada por uma matriz diagonal 2×2, $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ e adicionar-lhe uma matriz cuja primeira linha é zero e a segunda é 2k.

No exemplo:



Eixo de simetria: $y = -2$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4 & -1{,}39 & -0{,}91 & 3{,}54\\4 & 2{,}6 & -0{,}56 & 2{,}05\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-4 & -4 & -4 & -4\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}4 & -1{,}39 & -0{,}91 & 3{,}54\\-4 & -2{,}6 & 0{,}56 & -2{,}05\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-4 & -4 & -4 & -4\end{bmatrix} =$$

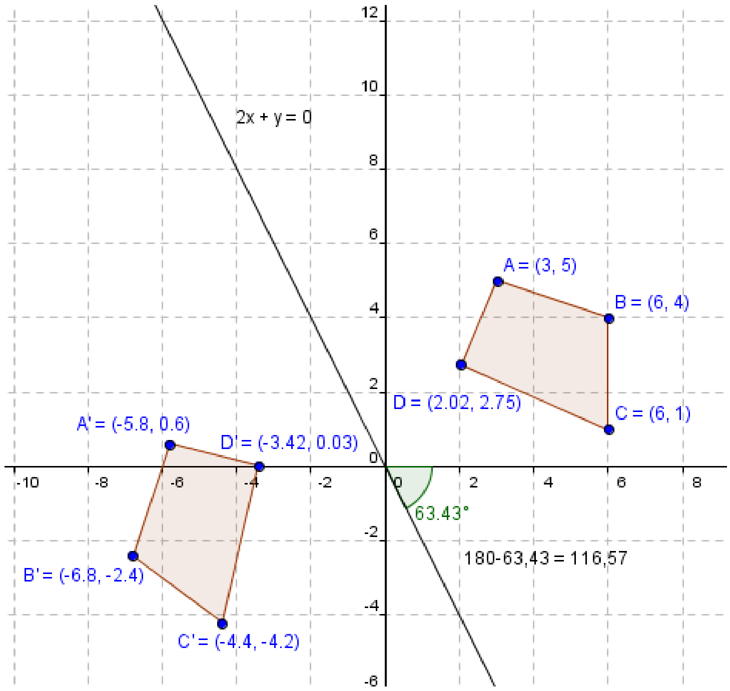
$$\begin{bmatrix}4 & -1{,}39 & -0{,}91 & 3{,}54\\-8 & -6{,}6 & -3{,}44 & -6{,}05\end{bmatrix}$$

Os vértices do novo polígono são:

$A' = (4,-8)$ $B' = (-1{,}39;\ -2{,}6)$ $C' = (-0{,}91;\ -3{,}44)$

e $D' = (3{,}54;\ -6{,}05)$

- <u>Em relação a uma reta que passa na origem</u>



A reflexão em relação a uma reta que passa na origem feita sem a utilização das matrizes significa traçar perpendiculares ao eixo de simetria a passar por cada um dos vértices e depois calcular as distâncias dos mesmos à reta, duplicando para o cálculo do novo vértice. Este processo é mais demorado do que se utilizarmos matrizes, pois neste caso temos apenas de multiplicar a matriz cujas colunas são os vértices do polígono pela matriz 2×2, $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & sen 2\alpha\\sen 2\alpha & -sen 2\alpha\end{bmatrix}$, em que α é o ângulo que a reta faz com o eixo das abcissas.

No exemplo:

Eixo de simetria: $2x + y = 0$ ou $y = -2x$

Ângulo α: 180-63,43 = 116,57º

$$\begin{bmatrix}\cos 233{,}14° & sen\ 233{,}14°\\sen 233{,}14° & -cos 233{,}14°\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 6 & 6 & 2{,}02\\5 & 4 & 1 & 2{,}75\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}6 & -0{,}8\\-0{,}8 & 0{,}6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 6 & 6 & 2{,}02\\5 & 4 & 1 & 2{,}75\end{bmatrix} =$$

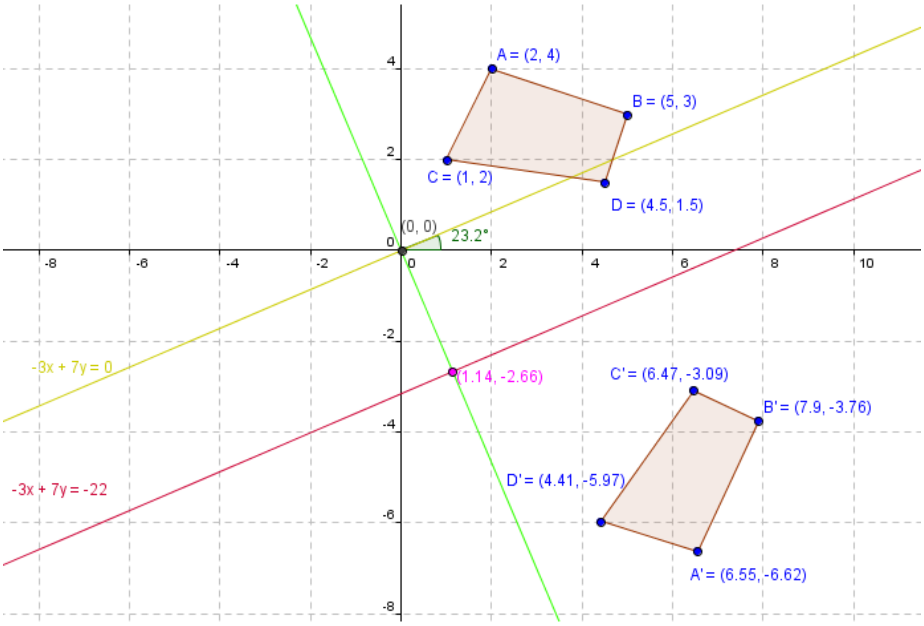
$$\begin{bmatrix}-5{,}8 & -6{,}8 & -4{,}4 & -3{,}4\\0{,}6 & -2{,}4 & -4{,}2 & 0{,}03\end{bmatrix}$$

sendo os vértices da nova figura:

$A' = (-5{,}8;\ 0{,}6)$ $B' = (-6{,}8;\ -2{,}4)$ $C' = (-4{,}4;\ -4{,}2)$ $D' = (-3{,}4;\ 0{,}03)$

- <u>Em relação a uma qualquer reta</u>

Sem a utilização de matrizes é necessário utilizar um processo semelhante ao descrito no caso anterior, usando as distâncias, o que se torna um pouco exaustivo e longo.
Usando as matrizes faz-se a reflexão numa paralela à reta dada que passe na origem como foi indicado no ponto anterior, posteriormente soma-se uma matriz em que cada coluna é o dobro das coordenadas do ponto de interseção da reta inicial com a sua perpendicular que passa na origem.



No exemplo:

Eixo de simetria: $-3x + 7y = 22$

perpendicular ao eixo de simetria que passa na origem: $-7x - 3y = 0$

Interseção das duas retas : P (1,14; -2,66)

$\alpha = 23{,}2°$ → $2\alpha = 46{,}4°$

vetor $\overrightarrow{OP}$: (1,14; -2,66)

$$\begin{bmatrix} cos46{,}4° & sen46{,}4° \\ sen46{,}4° & -cos46{,}6° \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4{,}5 & 1 \\ 4 & 3 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 1{,}14 & 1{,}14 & 1{,}14 & 1{,}14 \\ -2{,}66 & -2{,}66 & -2{,}66 & -2{,}66 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}69 & 0{,}724 \\ 0{,}724 & -0{,}69 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4{,}5 & 1 \\ 4 & 3 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 1{,}14 & 1{,}14 & 1{,}14 & 1{,}14 \\ -2{,}66 & -2{,}66 & -2{,}66 & -2{,}66 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4{,}276 & 5{,}622 & 4{,}191 & 2{,}138 \\ -1{,}312 & 1{,}55 & 2{,}223 & -0{,}656 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}28 & 2{,}28 & 2{,}28 & 2{,}28 \\ -5{,}32 & -5{,}32 & -5{,}32 & -5{,}32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}55 & 7{,}9 & 6{,}47 & 4{,}41 \\ -6{,}63 & -3{,}77 & -3{,}09 & -5{,}97 \end{bmatrix}$$

Ficando as coordenadas da imagem:

A' = (6,55 ; -6,63) ; B' = (7,9 ; -3,77) ; C' = (6,47 ; -3,09) e D' = (4,41 ; -5,97)

Nota: algumas diferenças nas centésimas em relação à figura feita usando o Geogebra são devidas a arredondamentos.

- **Translações**

Este tipo de isometria pode ser facilmente feita utilizando a soma de matrizes, pois uma translação é um deslocamento segundo um determinado vetor.

No exemplo:

Pentágono de vértices:

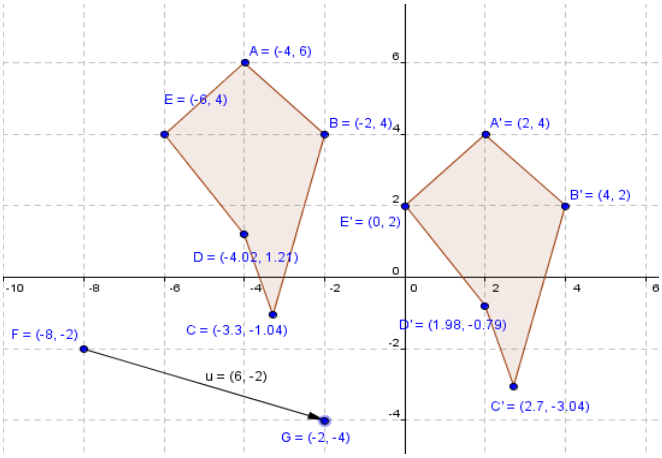
A = (-4; 6)   B = (-2 ; 4) C = (-3,3 ; -1,04)

D = (-4,02; 1,21)   e   E = (-6 ; 4)

Vetor: $\vec{u} = (6, -2)$

Imagem é calculada por:

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 4 \\ -3{,}3 & -1{,}04 \\ -4{,}02 & 1{,}21 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2{,}7 & -3{,}04 \\ 1{,}98 & -0{,}79 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Vértices da imagem:

A' = (2 ; 4)   B' = (4 ; 2)   C' = (2,7 ; -3,04)   D' = (1,98 ; -079) e E' = (0 ; 2)

❖ **Rotação**

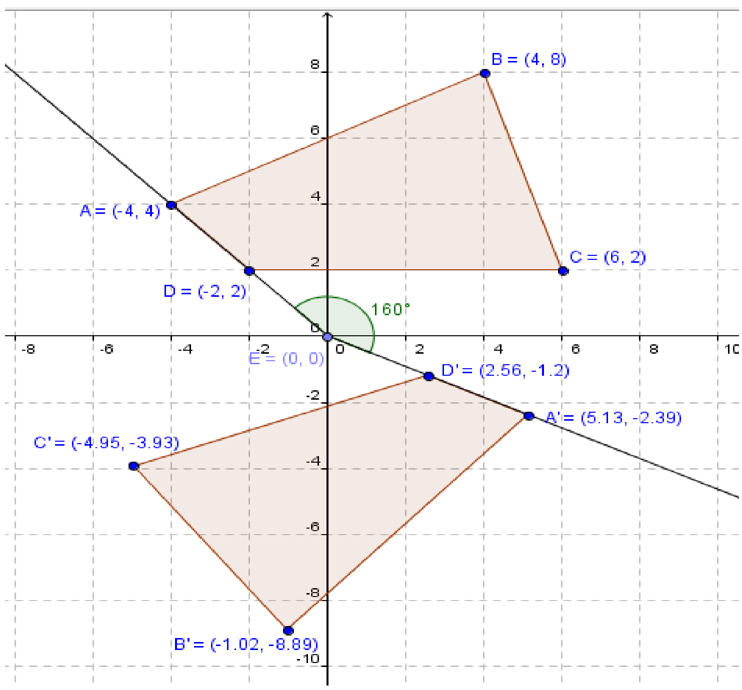
Para a rotação é necessário saber as coordenadas do centro (C) e o ângulo, θ, da rotação.

- <u>Supondo que o centro é a origem do referencial.</u>

Neste caso basta multiplicar a matriz cujas colunas são os vértices do polígono pela matriz quadrada, $2{\times}2$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Um exemplo:

Rotação de centro O = (0,0)
e
ângulo $\theta = 160º$



$$\begin{bmatrix} \cos(160°) & -sen\,(160°) \\ sen\,(160°) & \cos(160°) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}94 & -0{,}342 \\ 0{,}342 & -0{,}94 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5{,}13 & -1{,}02 & -4{,}96 & 2{,}56 \\ -2{,}39 & -8{,}89 & -3{,}93 & -1{,}2 \end{bmatrix}$$

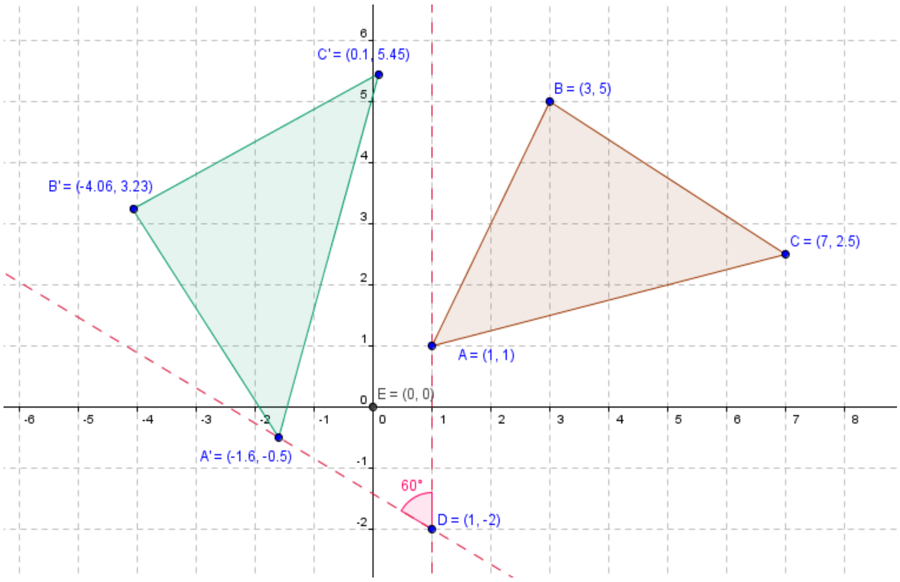
As coordenadas do polígono após a rotação serão:

$A'\,(5{,}13\,;\,-2{,}39);\ \ B'\,(-1{,}02\,;\,-8{,}89);\ C'(-4{,}96;\ -3{,}93)e\ \ D'(\,2{,}56;\ -1{,}2)$

- <u>Supondo que o centro é um qualquer ponto de coordenadas (a,b).</u>

Para determinar as coordenadas da imagem de um polígono segundo a rotação de centro C(a,b) e ângulo α seguem-se os seguintes passos:

- Translação segundo o vetor $\overrightarrow{CO}$, em que O é a origem do referencial.
- Rotação de centro em O e ângulo α (de acordo com o processo descrito acima)
- Translação segundo o simétrico do vetor $\overrightarrow{CO}$



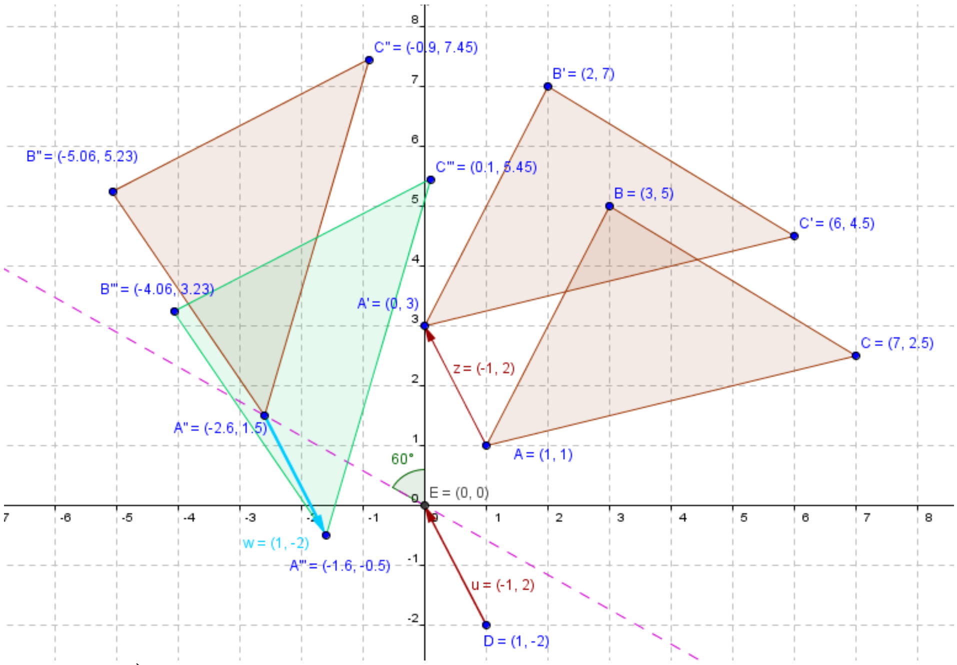
No exemplo:

Polígono composto pelos vértices:

A (1,1); B (3,5) e C (7; 2,5)

Ângulo α= 60º

Centro: D (1, -2)



- Translação segundo o vetor $\overrightarrow{DO}$ (-1, 2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 2{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4{,}5 \end{bmatrix}$$

- Rotação de centro em O e ângulo 60º

$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -sen\ 60° \\ sen\ 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}6 & -5{,}06 & -0{,}9 \\ 1{,}5 & 5{,}23 & 7{,}45 \end{bmatrix}$$

- Translação segundo o vetor simétrico de $\overrightarrow{DO}$ (1, -2)

$$\begin{bmatrix} -2{,}6 & -5{,}06 & -0{,}1 \\ 1{,}5 & 5{,}23 & 7{,}45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}6 & -4{,}06 & 0{,}1 \\ -0{,}5 & 3{,}23 & 5{,}45 \end{bmatrix}$$

As coordenadas do polígono imagem serão A’’’(-1,6;-0,5); B’’’(-4,06; 3,23) e C’’’(0,1; 5,45)

7) Homotetias

As homotetias são transformações geométricas que mantêm a forma das figuras às quais são aplicadas.

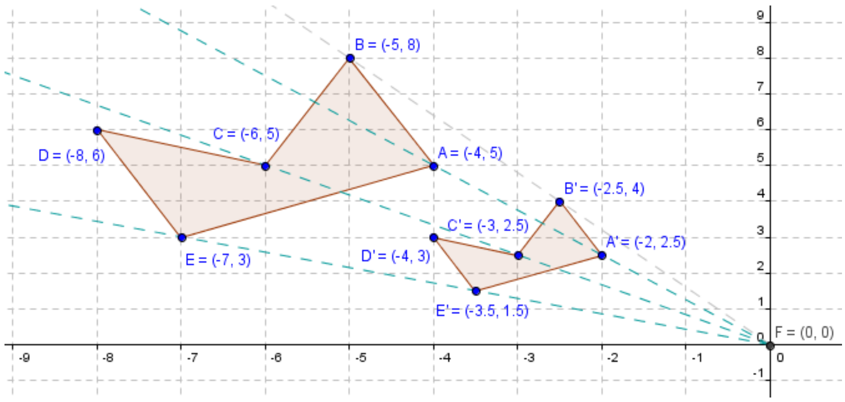
❖ Razão igual a 1

As homotetias de razão 1 são as isometrias, já que sendo transformações geométricas que mantem a forma, mantêm também as dimensões e por isso passam a ser isometrias.

❖ Razão diferente de 1

Para encontrar o transformado de uma figura por uma homotetia de razão r ≠ 1e centro na origem do referencial, tem de se multiplicar a matriz cujas linhas são os vértices da figura por uma matriz diagonal em que a diagonal é composta pelo valor da razão da homotetia.

- **razão <1**



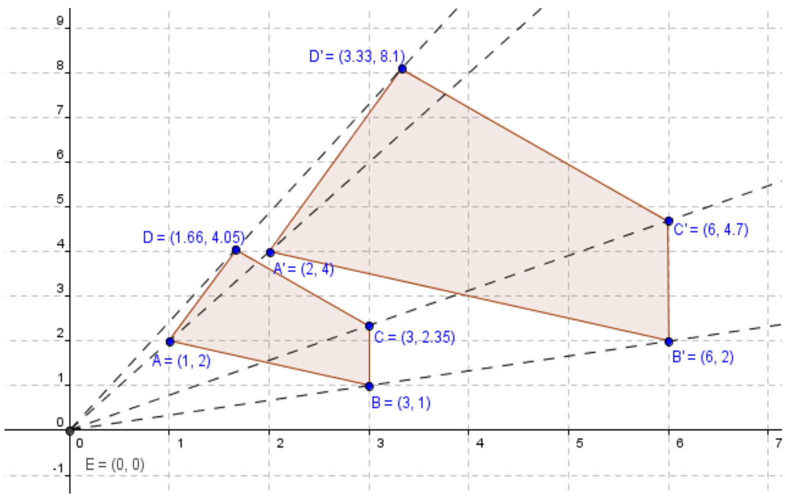
Considerando um polígono de vértices A =(-4,5); B =(-5,8); C =(-6, 5); D =(-8,6) e E =(-7, 3)

Para determinar os vértices do polígono que resulta da homotetia de razão 0,5:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 & -8 & -7 \\ 5 & 8 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2{,}5 & -3 & -4 & -3{,}5 \\ 2{,}5 & 4 & 2{,}5 & 3 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

O transformado é o polígono de vértices A' =(-2; 2,5); B'=(-2,5; 4); C'=(-3; 2,5); D' =(-4, 3) e E' =(-3,5; 1,5)

- **Razão >1**



Considerando um polígono de vértices:
A =(1,2);
B =(3,1);
C =(3; 2,35) e
D =(1,66; 4,05)
Sendo a razão da homotetia = 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1{,}66 \\ 2 & 1 & 2{,}35 & 4{,}05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 3{,}33 \\ 4 & 2 & 4{,}7 & 8{,}1 \end{bmatrix}$$

Concluindo-se que o transformado é o quadrilátero de vértices A' =(2, 4); B' =(6, 2); C' =(6;4,7) e D' =(3,33; 8,1)

8) Identificação do tipo de cónica dada a equação geral

Dado que as cónicas são, no ensino secundário, facultativas, o que, na prática, significa nunca serem faladas, irei apenas fazer uma pequena referência ao fato de as matrizes poderem ser utilizadas para identificar o tipo de cónica quando se tem a sua equação geral.

Seja $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a equação geral de uma cónica. Na forma matricial esta equação fica $[x \quad y]M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \quad E]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \Leftrightarrow [x \quad y]\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \quad E]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$

É através do determinante da matriz M que é possível identificar de que cónica se trata.

Assim:

Se $\begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} > 0$ a equação representa uma elipse e se B = 0 trata-se de um caso particular que é a circunferência de centro no ponto $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$

Se $\begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} < 0$ a equação representa uma hipérbole

Se $\begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} = 0$ a equação representa uma parábola

Alguns exemplos:

- $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 6x + 9y - 4 = 0$

  Neste caso A = 4; B = $-\frac{12}{2}$ =-6 e C = 9

  $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$ é uma parábola

- $4x^2 - 8xy + 2y^2 - 2x + y + 15 = 0$

  Neste caso tem-se A = 4, B = $-\frac{8}{2}$ =-4 e C = 2

  $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8 < 0$ é uma hipérbole

- $16x^2 + 16y^2 - 16x + 8y - 59 = 0$

  Neste caso A = 16, B = 0 e C = 16

  $\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} = 256$ e 256 > 0 é uma elipse. Como B = 0, trata-se de um caso particular de elipse, ou seja, uma circunferência de centro no ponto

$({}^{16}/_{2}, -{}^{8}/_{2}) = (8, -4)$, em que 16 e -8 são os simétricos dos coeficientes de, respetivamente, x e y

- $x^2 - xy + 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

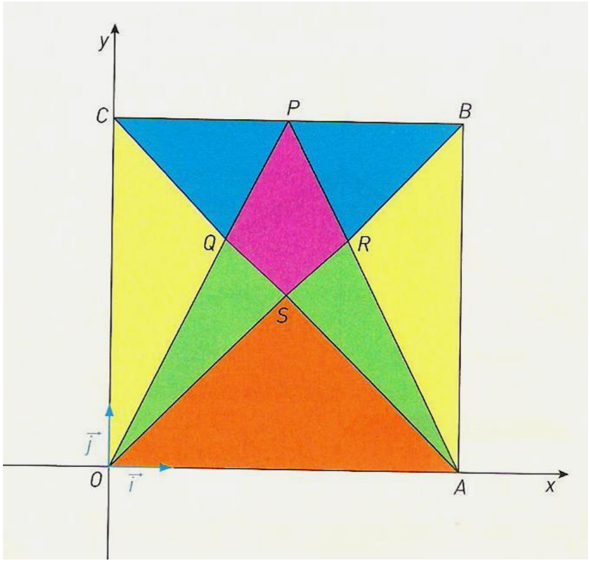
  Neste caso A = 1, B = -1 e C = 7

  $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 7 \end{vmatrix} = 7 - \frac{1}{4} = \frac{27}{4} > 0$ pelo que se trata de uma elipse.

Exercícios resolvidos adaptados dos manuais em vigor no ensino básico e secundário e dos exames nacionais do ensino secundário

1. No referencial o.n. da figura está representado um quadrado [OABC].
Sabe-se que:

- A unidade do referencial é o cm.
- O ponto P é o ponto médio de [BC].
- O ponto B tem como coordenadas (6,6).



a) Determina as coordenadas de P e S.

b) Escreve uma equação de PS.

c) Determina o declive e a ordenada na origem da reta RP.

d) Escreve a equação reduzida da reta *s* que passa pelo ponto B e é paralela à reta RP.

e) Define por uma condição o triângulo [OAS].

f) Mostra que o ponto Q tem de coordenadas (2 , 4).
Sugestão: começa por determinar as equações reduzidas das retas OP e AC e depois as coordenadas do ponto de interseção destas retas.

g) Determina a área:
- do triângulo [OQC]
- do triângulo [ASR]
- do triângulo [PQSR]

(tarefa 21 do Manual do 10º ano – Novo Espaço, Porto Editora)

Resolução:

a) P tem coordenadas $\left(\frac{6}{2},\ 6\right)$, ou seja, $(3,6)$
S tem coordenadas $\left(\frac{6}{2}, \frac{6}{2}\right)$, ou seja, $(3,3)$

b) Por análise da posição dos pontos:

Equação: $x = 3$

Resolvendo com matrizes:

$\overrightarrow{PS} = (3,3) - (3,6) = (0, -3)$

$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-3) - 0(y-6) = 0 \Leftrightarrow -6x + 18 = 0 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

c) Como A tem coordenadas (6, 0) e R pertence à reta AP tem-se:

$$\overrightarrow{AP} = (3,6) - (6,0) = (-3,6)$$

$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6(x-3) - (-3)(y-6) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 + 3y - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$6x + 3y - 36 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 12 = 0$

Declive é $m = -2$ e ordenada na origem é $b = 12$

d) Paralela a RP significa o mesmo vetor (-3, 6) e passando por B (6, 6)

$\begin{vmatrix} x-6 & y-6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6(x-6) - (-3)(y-6) = 0 \Leftrightarrow 6x - 36 + 3y - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$6x + 3y - 54 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 18 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 18$ (equação reduzida)

e) Determinar a reta AS ou AC

$\overrightarrow{AC} = (0,6) - (6,0) = (-6,6)$

$\begin{vmatrix} x & y-6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x - (-6)(y-6) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6y - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$y = -x + 6$ (equação reduzida da reta AS)

Reta OB tem por equação $y = x$

Assim o triângulo [OAS] é dado pela condição:

$$y \leq x \ \wedge \ y \leq -x + 6 \ \wedge y \geq 0$$

f) Reta OP

$\overrightarrow{OP} = (3,6)$ A reta OP é dada por: $\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$

Reta AC $x + y - 6 = 0$

O ponto Q é a interseção das retas OP e AC, que é dada pelo sistema:

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ cuja solução se obtêm fazendo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & \vdots & 0 \\ 0 & 3/2 & \vdots & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Logo as coordenadas de Q são (2, 4)

g) Áreas:

- $\triangle\, [OQC]$

  $\overrightarrow{OQ} = (2,4)$ $\overrightarrow{OC} = (0,6)$ $A_{[OQC]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|12 - 0| = \frac{12}{2} = 6\ cm^2$

- $\triangle\, [ASR]$

  $\overrightarrow{AS} = (-6,6)$ e $\overrightarrow{AR} = (-3,6)$ $A_{[ASR]} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-36 + 18| = \frac{18}{2} = 9\ cm^2$

- $[PQRS]$

  $\overrightarrow{PR} = (-3,6)$ e $\overrightarrow{PQ} = (3,6)$ $A_{[PQRS]} = \left|\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\right| = |-18 - 18| = 36\ cm^2$

2. Num referencial o.n. do plano, as equações $y = \frac{3}{2}x - 2$ e $(x, y) = (3, -1) + k(-3,4),\ k \in \mathbb{R}$ definem, respetivamente, as retas r e s.

a) Escreve a equação reduzida da reta *s* e uma equação vetorial da reta *r*.

b) As retas *r* e *s* definem, com o eixo das ordenadas um triângulo. Determina a área desse triângulo.

(adaptado de testes 5+5 Matemática 10º ano, texto editora)

Resolução:

a) reduzida de *s*:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-3) - (-3)(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 + 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 3$$

Vetorial de *r*:

$\vec{u} = (2,3)$ se $x = 2$ então $y = \frac{3}{2} \times 2 - 2 = 3 - 2 = 1$

$P = (2,1)$ r: $(x, y) = (2,1) + k(2,3),\ k \in \mathbb{R}$

b) vértices do triângulo

$A = (0, -2)$; $B = (0,3)$ e interseção de *r* e *s*

Determinar interseção de *r* e *s*:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 4 & 3 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 17/3 & 11/3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 11/17 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 30/17 \\ 0 & 1 & 11/17 \end{array}\right] \qquad C = \left(30/17, 11/17\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,3) - (0,-2) = (0,5) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{AC} = \left(30/17, 11/17\right) - (0,-2) = \left(30/17, 45/17\right)$$

Área do triângulo será:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 30/17 & 45/17 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|0 - \frac{150}{17}\right| = \frac{75}{17}$$

3. Determina uma equação reduzida da reta que passa no ponto (-3, -5) e no centro do lugar geométrico dos pontos dados pela equação

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y - 7 = 0$$

<u>Resolução:</u>

Dada esta equação tem-se A=1, B=0 e C=1 logo a matriz que permite identificar lugar geométrico em causa será:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ logo trata-se de uma elipse, como o termo em xy tem coeficiente zero, trata-se de uma circunferência e pode determinar-se o centro, que é no ponto $\left(\frac{10}{2}, -\frac{2}{2}\right)$, ou seja, $(-5, 1)$

A determinação da equação da recta será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-5x + 5y + 3) — (-25 - x - 3y) = 0 \Leftrightarrow -5x + x + 5y + 3y + 3 + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

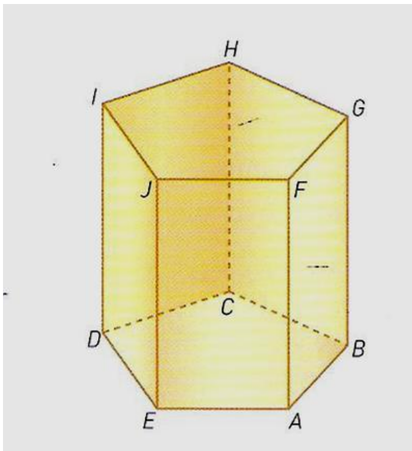
$$-4x + 8y + 28 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-x + 2y + 7 = 0}_{\text{equação geral}} \Leftrightarrow \underbrace{y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}}_{\text{Equação reduzida}}$$

4. Considera o prisma pentagonal reto representado na figura. Em relação a um referencial o.n. os vértices A, F e G têm como coordenadas, respetivamente, $(-1,2,-3)$, $(3,-2,5)$ e $(2,-3,5)$

Determina uma equação do plano:

a) FGH
b) ABC
c) ABG

(1º volume do manual 11ºano – novo espaço, porto editora)



Resolução:

a) FGH tem por equação $z = 5$

b) ABC tem por equação $z = -3$

c) ABG é o mesmo que AFG

$$\overrightarrow{FG} = (2,-3,5) — (3,-2,5) = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{FA} = (-1,2,-3) — (3,-2,5) = (-4,4,-8)$$

Plano é dado por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 8x + 0y - 4z - 4z + 0x - 8y = 0 \Leftrightarrow 8x - 8y - 8z = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

Substituindo pelas coordenadas de F

$3 - (-2) - 5 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + 2 - 5 + d = 0 \Leftrightarrow 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Assim, uma equação do plano ABG será $x - y - z = 0$

5. Identifica o conjunto de pontos que resulta da interseção dos planos α, β e θ, assim definidos:

α: $2x + y - 5 = 0$ β: $x + 3z - 16 = 0$ θ: $5y - z - 10 = 0$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 3 & 27/2 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 0 & 29 & 145 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Os três planos intersetam-se no ponto de coordenadas (1,3,5)

6. Resolve, classifica e interpreta geometricamente a solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \\ -5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3x + y = -1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

(1º volume do manual 11ºano – novo espaço, porto editora)

Resolução:

a) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 1\\3 & 2 & 0 & 0\\0 & -5 & 3 & 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 1\\0 & 5 & -3 & -3\\0 & -5 & 3 & 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 2\\0 & 5 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ Os três planos não se intersetam.

No entanto o 1º e o 2º intersetam-se segundo uma reta formada pelos pontos de coordenadas $\left(-2z+2,\ \frac{3}{5}z-\frac{3}{5}\ ,z\right)$, o 1º e o 3º numa reta cujos pontos têm coordenadas $(-2z+2, y, z)$ e o 2º e o 3º numa reta cujos ponto têm coordenadas $\left(x,\ \frac{3}{5}z-\frac{3}{5}\ ,\ z\right)$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\-3 & 1 & 0 & -1\\1 & -1 & 3 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\0 & 7 & -3 & 8\\0 & -3 & 4 & -3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{8}{7}\\0 & -3 & 4 & -3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\\0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{8}{7}\\0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{3}{7}\end{array}\right]=$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\\0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{8}{7}\\0 & 0 & 1 & \frac{3}{19}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{14}{19}\\0 & 1 & 0 & \frac{23}{19}\\0 & 0 & 1 & \frac{3}{19}\end{array}\right]$

O sistema representa três planos que se intersetam no ponto de coordenadas

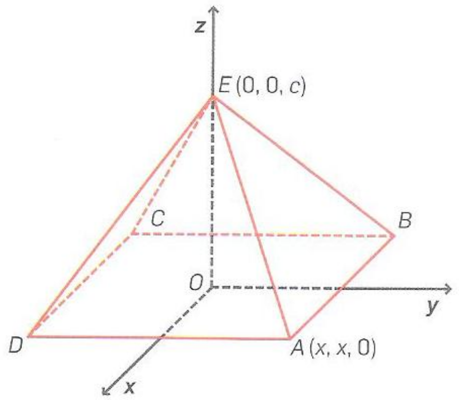
$$\left(\frac{14}{19};\ \frac{23}{19};\ \frac{3}{19}\right)$$

7. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, uma pirâmide quadrangular.

Admite que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz, entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos.

Com o movimento do vértice E, os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy, de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular;
- o vértice A tem abcissa igual à ordenada;
- sendo x a abcissa de A e sendo c a cota de E, tem-se sempre $x+c=6$



Seja $V(x)$ o volume da pirâmide, em função de x $(x \in]0,6[)$.

Mostra que $V(x)=8x^2-\frac{4}{3}x^3$

(adaptado de um teste intermédio, 11º ano, maio de 2008)

Resolução:

$A\,(x,x,0)$ $\quad B(-x,x,0)$ $\quad I\,(x,x,c)$ $\quad e \quad D(x,-x,0)$ sendo I o ponto com a mesma cota que E, na reta perpendicular à base que passa em A.

$\overrightarrow{AB}=(-x,x,0)-(x,x,0)=(-2x,0,0)$ $\qquad \overrightarrow{AI}=(x,x,c)-(x,x,0)=(0,0,c)=(0,0,6-x)$

$$\overrightarrow{AD}=(x,-x,0)-(x,x,0)=(0,-2x,0)$$

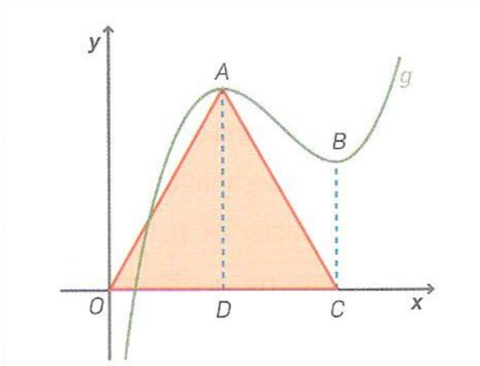
$$V_{piramide}=\frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}-2x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6-x\\ 0 & -2x & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}|-(-2x)(6-x)(-2x)|=\frac{1}{3}|4x^2(6-x)|=\frac{1}{3}|24x^2-4x^3|=$$

$$=\frac{24}{3}x^2-\frac{4}{3}x^3=8x^2-\frac{4}{3}x^3$$

8. Considera:

- A função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x)=3+\frac{6}{x}$;
- A função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-3$

Resolve os itens a) e b) usando métodos exclusivamente analíticos.



a) Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abcissa igual a 2.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto P.
Determina a equação reduzida da reta r.

b) Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g.
Os pontos A e B pertencem ao gráfico de g, sendo as suas ordenadas, respetivamente, o máximo e o mínimo relativo desta função.
Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A.
Determina a área do triângulo [OAC].

(adaptado de teste intermédio de Matemática, 11º ano, maio de 2010)

Resolução:

a) $f(2)=3+\frac{6}{2}=3+3=6$ $\qquad m=f'(2)=-\frac{6}{x^2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$P(2,6)$ $\qquad \vec{u}=(-2,3)$

Equação da reta é dada por:

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-6\\ -2 & 3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-2)-(-2)(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x-6+2y-12=0$$

$\Leftrightarrow\ 3x+2y-18=0\ \ \Leftrightarrow\ \ y=-\frac{3}{2}x+\frac{18}{2}\ \ \Leftrightarrow\ \ y=-\frac{3}{2}x+9$

b) De acordo com os dados do exercício têm de ser calculados o máximo e o mínimo da função g. Para tal utilizam-se os zeros da derivada:

$g'(x)=x^2-6x+8$ $\qquad$ $g'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x^2-6x+8=0\ \ \Leftrightarrow\ \ x=2\ \vee x=4$

Assim:

x		2		4	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	$g(2)$	↘	$g(4)$	↗
		máx.		min.	

$g(2)=\frac{1}{3}2^3-3(2^2)+8\times 2-3=$

$\frac{8}{3}-12+16-3=\frac{11}{3}$

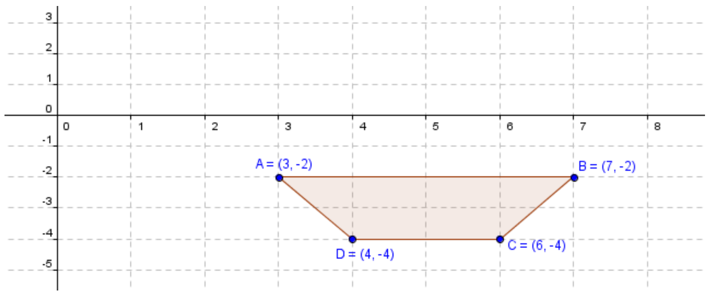
Assim tem-se que as coordenadas dos vértices do triângulo são:

$A(2,{}^{11}/_{3})$ $\qquad$ $C(4{,}0)$ $\qquad$ $O(0{,}0)$

$\overrightarrow{OA}=(2,{}^{11}/_{3})$ $\qquad$ $A_\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & {}^{11}/_{3}\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0-{}^{44}/_{3})\right|=\frac{1}{2}\times\frac{44}{3}=\frac{22}{3}$

$\overrightarrow{OC}=(4{,}0)$

9. No referencial ao lado representa-se o polígono ABCD. Indica as coordenadas das imagens dos seus vértices, que resulta de uma translação de sete unidades para a esquerda e três unidades para cima.



(adaptado do volume 1, Xis 8º, texto editora)

<u>Resolução:</u>

$\vec{v}=(-7{,}3)$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & -2\\ 6 & -4\\ 4 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7 & 3\\ -7 & 3\\ -7 & 3\\ -7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & -1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

as imagens são os pontos A’ (-4,1); B’ (0,1); C’ (-1,-1) e D’ (-3,-1)

10. Considera um referencial ortogonal e os pontos de coordenadas $A(-3,-2)$, $B(0{,}4)$ e $C(3{,}1)$.

Sabendo que no transformado do polígono ABC, A’ tem coordenadas (-1, -1)

Indica as coordenadas dos pontos B’ e C’.

(adaptado do volume 1, Xis 8º, texto editora)

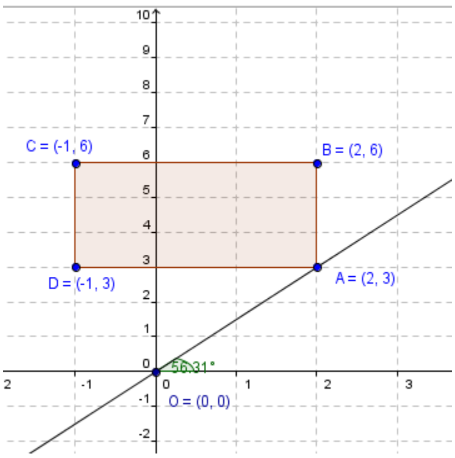
Resolução:

$$\vec{u} = (-1,-1) - (-3,-2) = (2,1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$B'(2,5)$ e $C'(5,2)$

11. Na figura estão representados, o quadrado ABCD e a reta r, que contém o ponto C.
Indica as coordenadas do transformado do quadrado pela reflexão relativa à reta r.

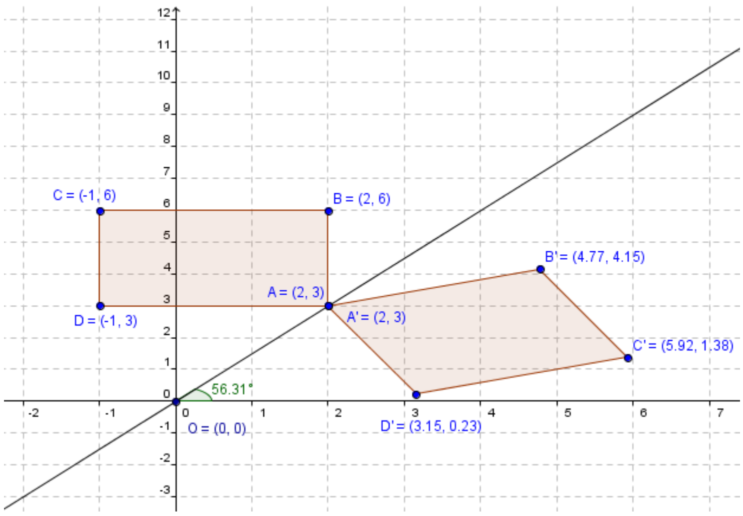


(adaptado do volume 1, Xis 8º, texto editora)

Resolução:

reta r : 3x-2y=0

α: 56,31º → 2α = 112,62º

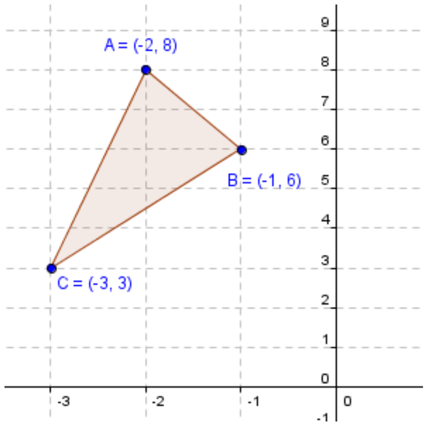


$$\begin{bmatrix} \cos(112{,}62°) & sen(112{,}62°) \\ sen(112{,}62°) & -\cos(112{,}62°) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4{,}77 & 5{,}92 & 3{,}15 \\ 3 & 4{,}15 & 1{,}38 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

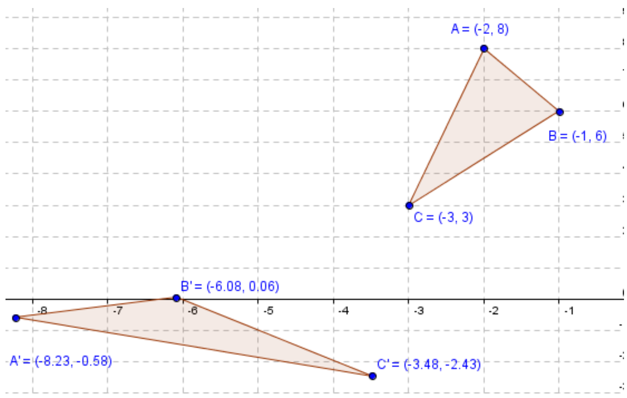
$A'(2;3)$ $B'(4{,}77;4{,}15)$ $C'(5{,}92;1{,}38)$ $D'(3{,}15;\ 0{,}23)$

12. Num referencial desenha um triângulo acutângulo e considera o ponto O, origem do referencial. Determina as coordenadas dos vértices do transformado do triângulo por uma rotação de 80º e centro em O.



(adaptado do volume 1, Xis 8º, texto editora)

Resolução:



$$\begin{bmatrix} \cos 80° & sen\ 80° \\ -sen\ 80° & \cos 80° \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}174 & 0{,}985 \\ -0{,}985 & 0{,}174 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -8{,}23 & -6{,}08 & -3{,}48 \\ -0{,}58 & 0{,}06 & -2{,}43 \end{bmatrix}$$

$A'\,(-8{,}23;\ -0{,}58)\quad B'(-6{,}08; 0{,}06)\quad e\quad C'(-3{,}48;\ -2{,}43)$

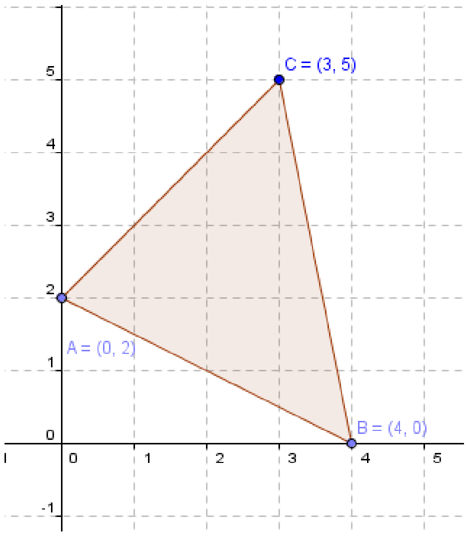
13. No referencial marca os pontos A(0,2), B(4,0) e C(3,5) e desenha o triângulo [ABC]

a) Indica as coordenadas dos ponto A', B' e C', vértices da imagem do triângulo [ABC] pela homotetia de razão 2 e centro em O

b) Determina a área do triângulo [ABC] e do triângulo [A'B'C']

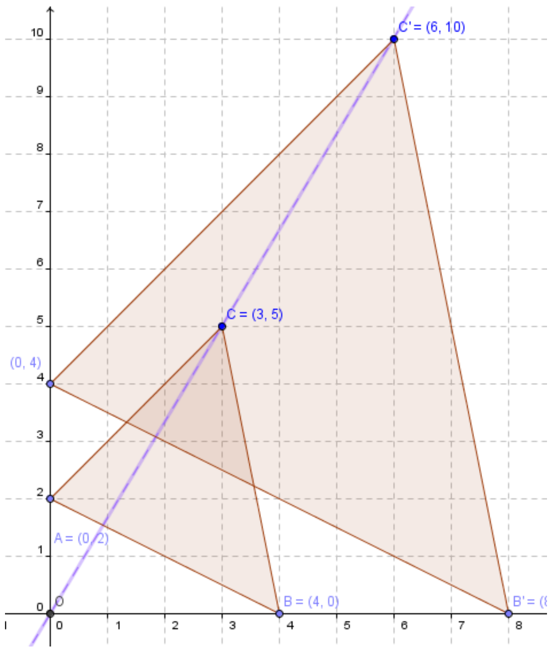
(adaptado do caderno de atividades, matemática dinâmica 7º ano, porto editora)

Resolução:



a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$



b) $\overrightarrow{AB} = (4,0) - (0,2) = (4,-2)$

$\overrightarrow{AC} = (3,5) - (0,2) = (3,3)$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|12 - (-6)| = \frac{18}{2} = 9$$